DS 05 - PCSI 2 et 3

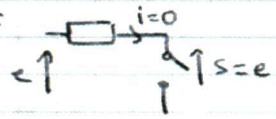
06/02/2021

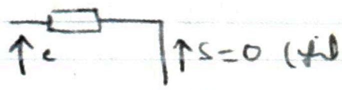
RSF et Filtrage

CORRIGÉ

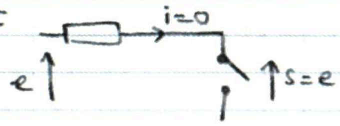
PROBLÈME I : Étude de filtres électroniques

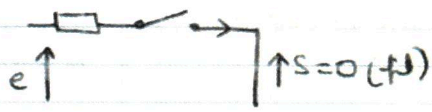
Partie A - L'interféromètre Virgo (CCP 2015)

A.1. Filtre 1. BF 

HF 

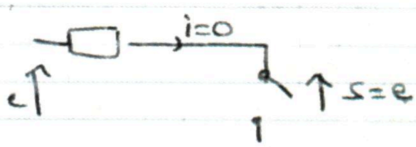
→ filtre passe-bas.

Filtre 2 BF 

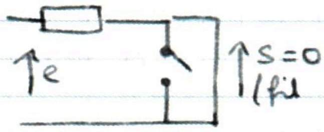
HF 

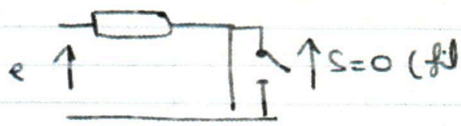
→ filtre passe-bas

Filtre 3 BF 

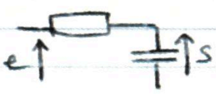
HF 

→ filtre passe-haut

Filtre 4 BF 

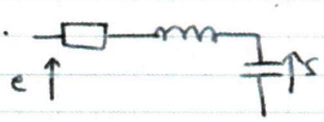
HF 

→ filtre passe-bande

A.2. Filtre 1. 

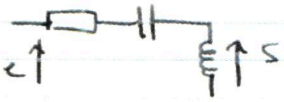
PDT $\underline{H} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} = \frac{1}{1+jRC\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{1}{RC}}$$

Filtre 2. 

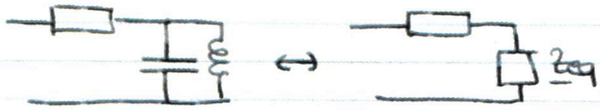
PDT $\underline{H} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + jL\omega + R}$

$\Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$ de la forme : $\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0},\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Filtre 3. 

PDT $\underline{H} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}+\underline{Z_L}} = \frac{jL\omega}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}}$

$\Rightarrow H = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega^2}$ de la forme $\boxed{\underline{H} = \frac{-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Filtre 4 

avec $\frac{1}{Z_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$

alors PDT : $\underline{H} = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} = \frac{1}{1 + R\left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right)}$

$\Rightarrow \underline{H} = \frac{j\frac{L\omega}{R}}{j\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2 + 1}$ de la forme $\boxed{\underline{H} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0},\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$

B.3.1 Filtre 1 $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \Rightarrow G_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right)$

à BF $\omega \ll \omega_c$, $G_{dB} \simeq 20\log(1) \overset{BF}{=} 0$ → cohérent car passe bas et $G_{dB} = 0 \Rightarrow s = e$!

à HF, $\omega \gg \omega_c$, $G_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right)$
$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \gg 1$

$\Rightarrow G_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) \overset{HF}{\simeq} -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$\Rightarrow$ la pente de l'asymptote à HF ($\omega \gg \omega_c$) est de <u>-20 dB/décade</u>. (comportement intégrateur).

B.3.2. on a $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}(f_c) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2}}\right) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow G_{dB}(f_c) = -3\text{ dB}$.

On lit donc f_c tq $\boxed{G_{dB}(f_c) = -3\text{ dB}}$

On trouve $\underline{f_c \simeq 200\text{ Hz}}$

B.3.3. $\omega_c = \frac{1}{RC}$ or $\omega_c = 2\pi f_c$ donc $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

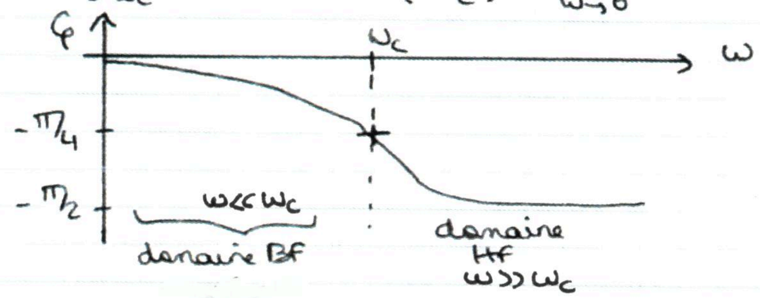
$\Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2\pi R f_c}}$

A.N. $C = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^2} \simeq \frac{1}{10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^2} \simeq \underline{10^{-6}\text{ F}}$

→ valeur cohérente

B.3. Allure de $\varphi(f)$. $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}) = \underbrace{\text{Arg}(1)}_{=0 \text{ car } 1>0} - \text{Arg}\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$\Rightarrow \varphi = -\arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$. $\lim_{\omega \to 0} \varphi = 0$ $\quad \lim_{\omega \to \infty} \varphi = -\frac{\pi}{2}$

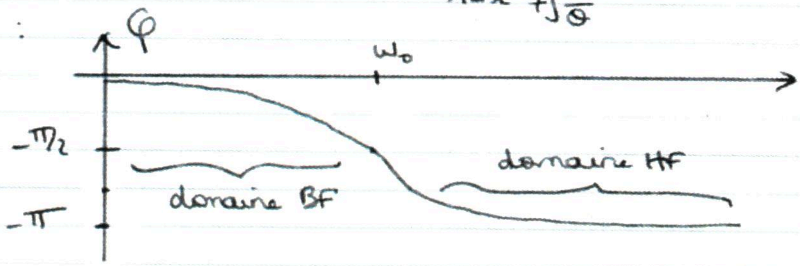


A.4. On veut un filtre qui permet d'obtenir un signal de sortie en opposition de phase (déphasage $\pm\pi$) avec le signal d'entrée.

D'après A 3.4, C'est impossible avec le filtre 1 car $\varphi \in [0, -\frac{\pi}{2}]$.

Pour le filtre 2, on a $\varphi = \arg\left(\frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}\right)$ soit $\varphi = -\arg\left(1-x^2+j\frac{x}{Q}\right)$.

Allure :



en effet, à BF $\varphi \to -\arg(1) = 0$.

à HF, $x^2 \gg 1$

$\varphi \simeq -\arg\left(-x^2\left(1 - j \times \frac{1}{Qx}\right)\right)$

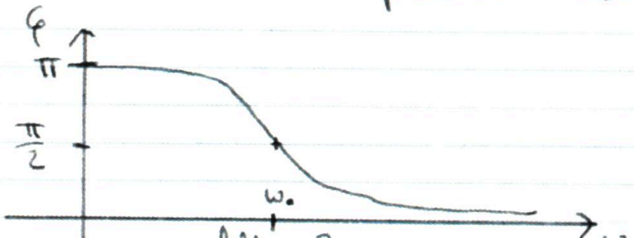
$\simeq -\arg(-x^2) \times \arctan\left(\frac{1}{Qx}\right)$

$\longrightarrow -\pi + 0 = -\pi$.

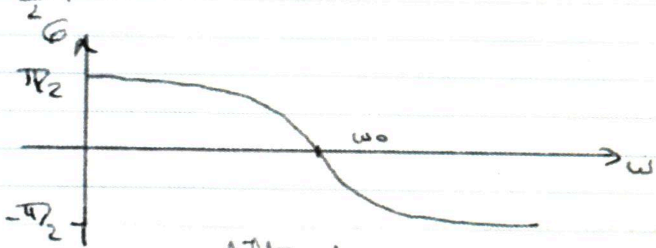
$\rightarrow$ Il est donc possible de réaliser une opposition de phase avec le filtre 2 en se plaçant à $\omega \gg \omega_0$ (donc en choisissant $\omega_0 \ll \omega_{signal}$).

Pour le filtre 3, on a $\varphi = \arg(-x^2) - \arg\left(1-x^2+j\frac{x}{Q}\right) \rightarrow$ il suffit de translater la courbe précédente de $+\pi$.

quant au filtre 4, on a $\varphi = \arg\left(j\frac{x}{Q}\right) - \arg\left(1-x^2+j\frac{x}{Q}\right) \rightarrow$ il suffit de translater la courbe précédente de $+\frac{\pi}{2}$.



filtre 3



filtre 4.

$\rightarrow$ Il est donc possible de réaliser une opposition de phase avec le filtre 3 en se plaçant à $\omega \ll \omega_0$ (donc en choisissant $\omega_0 \gg \omega_{signal}$)

On constate que c'est impossible avec le filtre 4 ($\varphi \in [+\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$).

Bilan : $\boxed{\text{on peut choisir le filtre 2 en prenant } \omega_0 \ll \omega_{signal} \text{ ou le filtre 3 en prenant } \omega_0 \gg \omega_{signal}}$

A 5. le filtre 2 est un passe-bas, il atténue les HF. or, l'opposition de phase est obtenue uniquement qu'à HF.

↳ il faut mettre un amplificateur pour réamplifier les signaux atténués par le filtre.

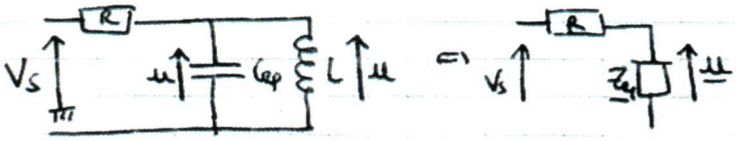
Même remarque pour le filtre 3 qui est passe-haut et qui atténue les BF. Or $\varphi = +\pi$ uniquement pour les BF.

Partie B - Etude de deux filtres (Centrale Supélec PSI 2010)

B.1. Etude du filtre 1.

B.1.1. C_1 et C_2 sont en série donc $C_{eq} = \dfrac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ (démonstration fac. si le résultat est connu)

donc

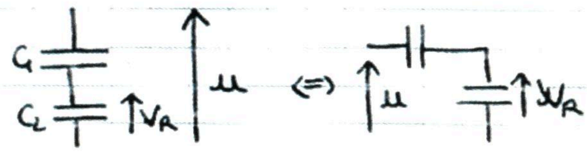


PDT : $\dfrac{\underline{u}}{\underline{V_s}} = \dfrac{\underline{Z_{eq}}}{R+\underline{Z_{eq}}} = \dfrac{1}{1+\frac{R}{\underline{Z_{eq}}}}$.

avec $\dfrac{1}{\underline{Z_{eq}}} = jC_{eq}\omega + \dfrac{1}{jL\omega} \Rightarrow \dfrac{\underline{u}}{\underline{V_s}} = \dfrac{1}{1+jRC_{eq}\omega - j\frac{R}{L\omega}}$

On fait ensuite un deuxième PDT pour exprimer u en fonction de V_e

C_1 et C_2 sont en série donc



$\Rightarrow V_R = \dfrac{\frac{1}{jC_1\omega}}{\frac{1}{jC_2\omega}+\frac{1}{jC_1\omega}}\,u$

$\Rightarrow V_R = \dfrac{1}{1+\frac{C_2}{C_1}}\,u$.

On en déduit $\underline{\beta} = \dfrac{\underline{V_R}}{\underline{V_S}} = \dfrac{\underline{V_R}}{\underline{u}} \times \dfrac{\underline{u}}{\underline{V_S}} = \underbrace{\dfrac{1}{1+\frac{C_2}{C_1}}}_{\frac{C_1}{C_1+C_2}} \times \dfrac{1}{\underbrace{1+jRC_{eq}\omega - j\frac{R}{L\omega}}_{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$

de la forme $\underline{\beta} = \dfrac{\beta_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $\beta_0 = \dfrac{C_1}{C_1+C_2}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC_{eq}}}$ et $Q\omega_0 = \dfrac{R}{L}$

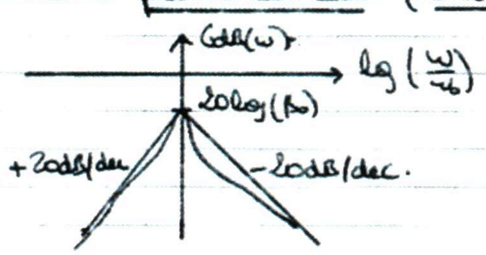
$\Rightarrow Q = \dfrac{R}{L}\times\sqrt{LC_{eq}}$

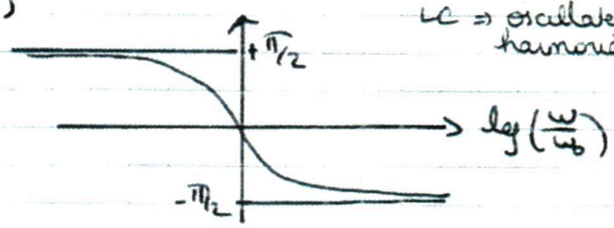
$$\Rightarrow \boxed{\underline{\beta} = \dfrac{\beta_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \text{ avec } \beta_0 = \dfrac{C_1}{C_1+C_2},\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC_{eq}}},\ Q = R\sqrt{\dfrac{C_{eq}}{L}},\ C_{eq} = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}}$$

↳ cohérent car $R \to \infty \Rightarrow$ circuit LC $\Rightarrow$ oscillateur harmonique

B.1.2. Filtre passe bande (ordre 2)

B.1.3.





$G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\dfrac{\beta_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\right)$

$\varphi = -\arg\left(1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$

à BF, $\omega \ll \omega_0$, $G_{dB}(\omega) \simeq +20\log\left(\dfrac{\beta_0}{Q\,\omega_0}\,\omega\right)$

$\Rightarrow$ pente $+20$ dB/dec.

à BF, $\varphi \simeq -\arg\left(-jQ\frac{\omega_0}{\omega}\right) \to +\frac{\pi}{2}$

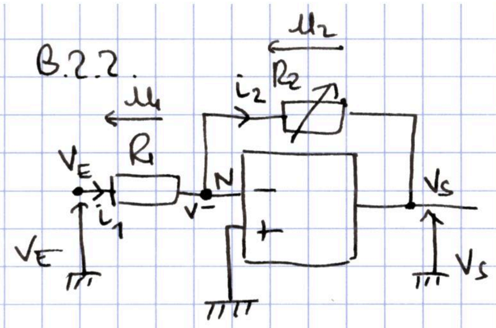
à HF $\omega \gg \omega_0$ $G_{dB}(\omega) \simeq 20\log\left(\dfrac{\beta_0}{Q\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = -20\log\left(\dfrac{Q\,\omega}{\beta_0\omega_0}\right)$

$\Rightarrow$ pente -20 dB/dec.

à HF $\varphi \simeq -\arg\left(jQ\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\frac{\pi}{2}$

B.2.1. Un fil relie la borne ⊖ de l'AO à sa sortie (celui de R_2) $\Rightarrow$ bouclage entre V_s et V_-
$\to$ l'A.O. peut fonctionner en régime linéaire

B.2.2.



D'après la loi des noeuds en N,

$$i_1 = i_2$$

car $i_- = 0$*. Donc les deux résistances sont en série. *car l'A.L.i est idéal.

Or, d'après la loi d'Ohm, $i_1 = \frac{u_1}{R_1}$ et $i_2 = \frac{u_2}{R_2}$

comme $u_1 = V_E - V^-$ et $u_2 = V^- - V_S$

On en déduit : $i_1 = \frac{V_E - V^-}{R_1}$ et $i_2 = \frac{V^- - V_S}{R_2}$

or $i_1 = i_2$ donc $\frac{V_E - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_S}{R_2}$

or l'A.L.i fonctionne en régime linéaire donc $V^- = V^+$. Or, $V^+ = 0$ ici (car borne ⊕ reliée à la masse) donc $V^- = 0$.

Ainsi $\frac{V_E}{R_1} = \frac{-V_S}{R_2}$ ce qui donne $\boxed{\frac{V_S}{V_E} = -\frac{R_2}{R_1}}$

Remarque : le th. de Millman donnait directement, au noeud N :

$$V_N = \frac{V_E/R_1 + V_S/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \quad \text{avec } V_N = V^- = V^+ = 0 \Rightarrow \frac{V_E}{R_1} + \frac{V_S}{R_2} = 0$$

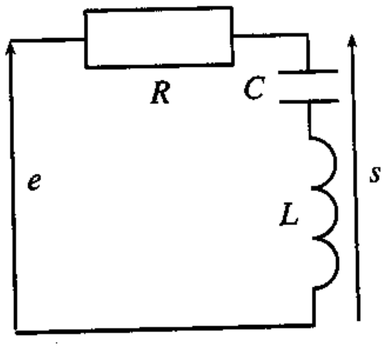
ce qui donnait directement le résultat.

On trouve que $\frac{V_S}{V_E} \in \mathbb{R}$, ce montage ne déphase pas en revanche.

si $R_2 \gg R_1$, $|V_S| \gg |V_E|$, on parle de montage <u>AMPLIFICATEUR et inverseur</u> (car $\frac{V_S}{V_E} < 0$).

Partie C – Elimination du bruit

Le filtre doit être coupe-bande et avoir pour fréquence de coupure f=50Hz. On propose le filtre simple ci-contre.



▪ Vérification du comportement coupe-bande :

→ À basse fréquence (BF), la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. À cause de l'interrupteur ouvert, l'intensité du courat est nulle dans le circuit et donc U_R =0. Comme la tension aux bornes d'un fil est nulle, U_L=0. Donc U_C=s=e.

→ À haute fréquence (HF), la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. À cause de l'interrupteur ouvert, i est nulle dans le circuit et donc U_R=0. Comme la tension aux bornes d'un fil est nulle, U_C=0. Donc U_L=s=e.

▪ Détermination de la fonction de transfert.

Posons $\underline{Z_{eq}}$ l'impédance équivalence de L et C en série. D'après la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R + \underline{Z_{eq}}} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$[LC] = T^2$ et $[RC] = T$ donc la relation est homogène.

De plus, $\underline{H}$ est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \qquad avec\ x = \frac{\omega}{\omega_c}, \qquad \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad et \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On remarque que $\underline{H}$=0 pour x=1.

▪ Choix des valeurs des composants

On veut $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 50Hz$, et on veut un filtre très sélectif (pour ne filtrer que le bruit). Il faut donc $\Delta f = \frac{f_c}{Q} \ll f_c$ soit $Q \gg 1$.

Prenons : L=100mH, C=100µF, R=10Ω. Ainsi, $f_c = 50Hz$ et Q=3,1 ce qui implique Δf=16Hz.

Remarquons que l'on pourrait s'abstenir de résistance (il y aurait alors uniquement la résistance des fils et celle de la bobine). En effet, souvent en TP, $R_{bobine} \approx 10\Omega$.