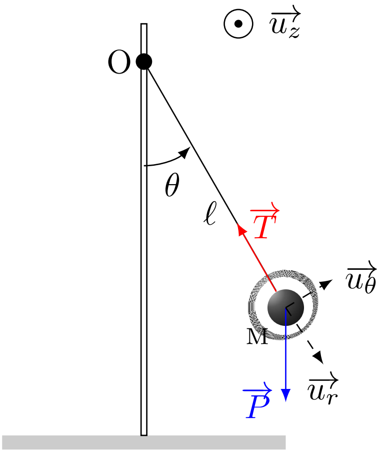
Pendule simple (/35)

1)



2) $\overrightarrow{OM}=l\vec{u}_r$

$\vec{v}=l\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}=l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{a}=l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta+l\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}=-l\dot{\theta}^2\vec{u}_r+l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

3)
Système étudié : la bille.
On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

BDF :
le poids $\vec{P}=mg\cos\theta\vec{u}_r-mg\sin\theta\vec{u}_\theta$
la tension du fil $\vec{T}=-T\vec{u}_r$

Le PFD donne $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{T}$

En projetant sur $\vec{u}_\theta$, on obtient $ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$
qui se réécrit $\boxed{\ddot{\theta}+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0}$

4) Si θ est petit, sin θ ≈ θ.
L'équation du mouvement devient dont linéaire et peut s'écrire
$\boxed{\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0}$ avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}}$
On a donc un oscillateur harmonique.

5) Les solutions sont de la forme $\theta(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$.

On lit graphiquement une amplitude $\boxed{A = 10°}$.
De plus $\theta(0)=A\cos(\phi)=A$ donc $\boxed{\phi=0}$
On compte 12,5 graduations par période donc T_0 = 0,625 s
Or $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$ donc $\boxed{\omega_0 = 10\text{ rad/s}}$

Le modèle prévoit $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ AN : ω_0 = 10 rad/s ce qui est en accord avec l'expérience.

6) On reprend le bilan des forces précédent en ajoutant la force de frottements fluides $\vec{f}=-\alpha\vec{v}=-\alpha l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

Le PFD donne $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{T}+\vec{f}$

En projetant sur $\vec{u}_\theta$, on obtient $ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta-\alpha l\dot{\theta}$

qui se réécrit $\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$.

Avec l'hypothèse des petits angles et en identifiant avec la forme canonique proposée , on obtient :

$$\ddot{\theta}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}}$ et $\boxed{Q=\frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{l}}}$

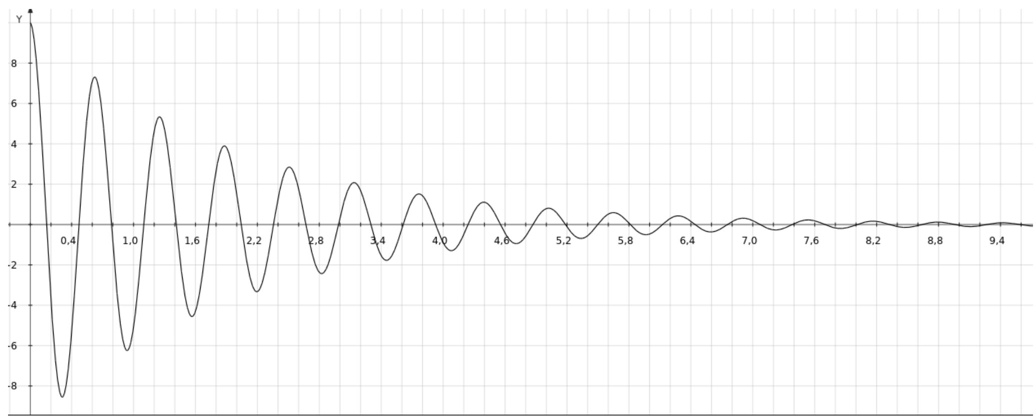
7) Q est le facteur de qualité sans dimension.

Le régime est pseudo-périodique pour $Q>1/2$ soit $\frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{l}}>\frac{1}{2}$.

Il faut donc $\alpha<2m\sqrt{\frac{g}{l}}$

AN : $\alpha < 4{,}0$ kg.s^{-1}

8)



On a une décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations.
Comme Q = 10, on observe environ 10 oscillations avant l'arrêt du pendule.
Le régime transitoire dure $\approx 10\,T_0 \approx 6$ s.

Problème (41)

1) On étudie le système {ion} dans le réf du labo galiléen.
Bilan des forces :
- poids : négligé
- force de Coulomb : $\vec{f} = q\vec{E}$
- force de frottement fluide $\vec{f'} = -\alpha\vec{v}$

PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \alpha\vec{v}$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{\alpha}{m}\vec{v} = \dfrac{q\vec{E}}{m}}$

2) $\dfrac{q\vec{E}}{m}$ étant constant, quand $\vec{v}$ augmente $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ diminue, et ce jusqu'à atteindre $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$.
Ce qui correspond à $\boxed{\vec{v}_{lim} = \dfrac{q\vec{E}}{\alpha}}$ donc $\boxed{\mu = q/\alpha}$

3) AN : $\mu = \dfrac{2e}{6\pi\eta r} = 3{,}4 \cdot 10^{-8}\ m^2 \cdot s^{-1} V^{-1}$; $v_{lim} = 6{,}8 \cdot 10^{-6}\ m \cdot s^{-1}$

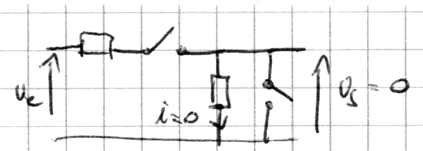
4) On cherche $\underline{\vec{v}}$ tel que $\vec{v} = Re(\underline{\vec{v}})$
$\rightarrow \underline{\vec{v}} = V e^{j(\omega t + \varphi)}\vec{u_x} = \underline{V} e^{j\omega t}\vec{u_x}$ avec $\boxed{\underline{V} = Ve^{j\varphi}}$

5) PFD projeté sur $\vec{u_x}$: $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{\alpha}{m}v = \dfrac{q}{m}E_0\cos(\omega t)$
en complexes : $j\omega\underline{V} + \dfrac{\alpha}{m}\underline{V} = \dfrac{qE_0}{m}$ (après simplification par $e^{j\omega t}$)

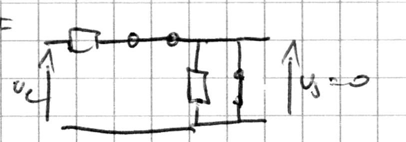
d'où $\underline{V} = \dfrac{qE_0/m}{\frac{\alpha}{m} + j\omega}$ ou encore $\boxed{\underline{V} = \dfrac{qE_0/\alpha}{1 + j\frac{m}{\alpha}\omega}}$

6) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$ donc $\boxed{\underline{V} = j\omega\underline{X}}$ d'où $\boxed{\underline{X} = \dfrac{\frac{qE_0}{j\alpha\omega}}{1 + j\frac{m}{\alpha}\omega}}$

7) BF :



HF



$\Rightarrow$ Passe-bande

8) $\underline{H} = \dfrac{R/\!/Z_c}{R + Z_c + R/\!/Z_c} = \dfrac{1}{1 + \frac{R + Z_c}{R/\!/Z_c}} = \dfrac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \dfrac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$= \dfrac{1/3}{1 + j\frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$= \dfrac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $\boxed{A = \frac{1}{3}\ ;\ Q = \frac{1}{3}\ ;\ \omega_0 = \frac{1}{RC}}$

I 9) $\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|}$

I d'où $\boxed{G(\omega) = \dfrac{A}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$

II $G(\omega)$ est max pour $\underline{\omega = \omega_0}$. On a alors $\boxed{G^{max} = G(\omega_0) = A = \frac{1}{3}}$

10) $\dfrac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \dfrac{A}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow \underline{v_s}\left(1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = A\,\underline{v_e}$

II

$\Rightarrow$ $\left(\times\, j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)$ $\underline{v_s}\left(j\omega\frac{\omega_0}{Q} + (j\omega)^2 + \omega_0^2\right) = j\omega\frac{\omega_0 A}{Q}\underline{v_e}$

I donc l'éq-diff s'écrit : $\boxed{\dfrac{d^2v_s}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \dfrac{A\omega_0}{Q}\dfrac{dv_e}{dt}}$

11) Avec $v_e = \dfrac{R_1+R_2}{R_1}v_s$, l'éq-diff ci-dessus se réécrit :

I $\dfrac{d^2v_s}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = A\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\dfrac{dv_s}{dt}$

I puis, comme $Q = A$: $\boxed{\dfrac{d^2v_s}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\left[1 - Q\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\right]\dfrac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0}$

12) Pour avoir des solutions purement sinusoïdales, il faut que le terme

I en $\dfrac{dv_s}{dt}$ soit nul càd $1 - Q\dfrac{R_1+R_2}{R_1} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{Q} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$

II $\Rightarrow \boxed{\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{1}{Q} - 1}$ $\underline{AN}$: $\dfrac{R_2}{R_1} = 2$

I 13) $G_1 = \dfrac{v_e}{v_s} = \dfrac{R_1+R_2}{R_1} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1} = 3$

I $G_2(\omega_0) = A = 1/3$

I $G_2(2\omega_0) = \dfrac{A}{\sqrt{1+Q^2\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}} = \dfrac{1}{3{,}4}$

14) Un signal à $\omega = \omega_0$ est multiplié par G_1 puis par G_2 donc par $\underline{G_1G_2 = 1}$. En revanche, un signal à $\omega \neq \omega_0$, par exemple

III $\omega = 2\omega_0$, est multiplié par $G_1G_2 = \frac{3}{3{,}4} = \underline{0{,}9}$ et après n passages (bouclage) par $\underline{(0{,}9)^n}$. ~~De~~ plus il est déphasé à chaque passage. <u>Donc seul un signal à ω_0 subsiste.</u>

I 15) $\omega_0 = 2\pi f = \dfrac{1}{RC} \Rightarrow RC = \dfrac{1}{2\pi f} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ s

II Choix : $C = 0{,}1\ \mu F$ et $R = 1{,}6\ k\Omega$ puis $R_1 = 1k\Omega$ $R_2 = 2k\Omega$