Devoir surveillé n°4

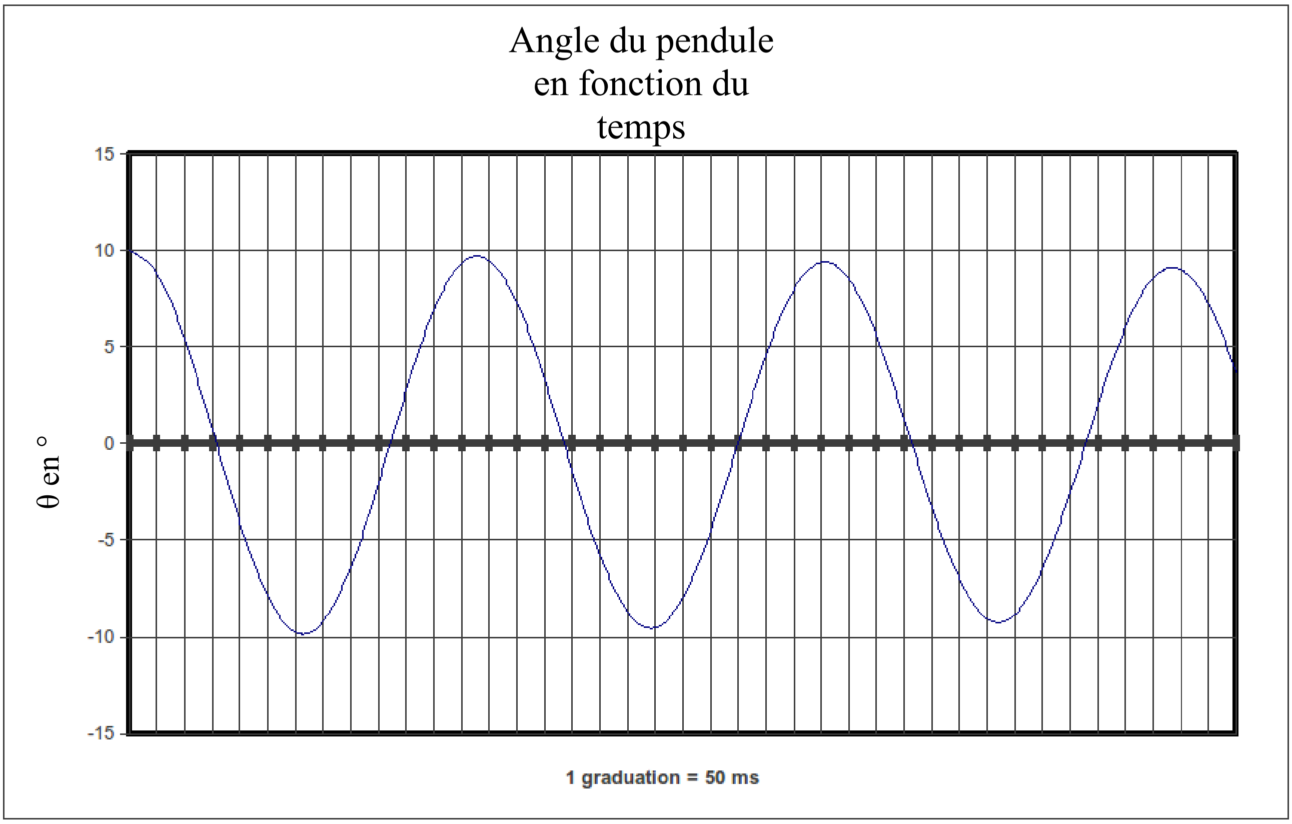
Durée : 2 h
La calculatrice **est autorisée.**
Le sujet comporte 4 pages et 2 problèmes indépendants.
Le poids de chaque problème dans le barème total est indiqué en % dans son titre.

Problème 1 : Pendule simple (45%)

Une bille M de masse m = 200 g est accrochée au bout d'un fil de masse négligeable, de longueur l = 0,10 m et suspendu en un point O fixe du support. On fait l'hypothèse d'un mouvement plan du pendule. On note θ l'angle entre la verticale et le fil.
On prendra g = 10 m.s^{-2}.

1) Faire un schéma du pendule. Y faire figurer la base mobile des coordonnées polaires.
2) Exprimer dans cette base le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. En déduire les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$.

Une acquisition expérimentale fournit le graphe ci-dessous :



1ère hypothèse : on néglige les frottements

3) En supposant l'absence de frottements sur M, établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ(t).
4) Montrer que dans l'hypothèse des petits angles cette équation se ramène à celle de l'oscillateur harmonique, que l'on mettra sous forme canonique en introduisant une pulsation ω_0.
5) Donner la forme générale des solutions θ(t) de cette équation. En utilisant le graphe ci-dessus,

déterminer la valeur numérique de chacun des paramètres de θ(t).
Y a-t-il accord entre la valeur de ω_0 prévue par le modèle et la valeur expérimentale de ω_0 ?

2ème hypothèse : on constate en fait une légère décroissance de l'amplitude des oscillations, ce qui nous amène à prendre en compte les frottements

6) On suppose l'existence d'une force de frottements fluides $\vec{f}=-\alpha\vec{v}$. Montrer que, toujours dans l'hypothèse des petits angles, l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

en précisant les expressions de ω_0 et Q en fonction de l, g, m et α.
7) Comment se nomme Q ? Quelle est son unité ? Pour quelles valeurs de α observe-t-on un régime pseudo-périodique ?
8) On estime ici que Q = 10, tracer l'allure de θ(t). En combien de temps (approximativement) le pendule s'arrête-t-il ?

Problème 2 : Étude d'un conductimètre (55%)

<u>Partie 1 : Mouvement d'un ion sous l'action d'un champ électrique</u>

On rappelle l'expression de la force de Coulomb à laquelle tout ion de charge *q*, de masse *m*, placé dans un champ électrique $\vec{E}$ est soumis : $\vec{f}=q\vec{E}$. On suppose que le milieu dans lequel l'ion se déplace exerce une force de frottement fluide $\vec{f}'=-\alpha\vec{v}$ avec $\alpha=6\pi\eta r$ (*r* est le rayon de l'ion et η une grandeur caractéristique du milieu). On ne tiendra pas compte du poids de l'ion dans le référentiel d'étude galiléen.

A. Le champ électrique est constant : $\vec{E}=E_0\vec{u}_x$

1) En appliquant le PFD à l'ion, établir l'équation différentielle du mouvement en variable $\vec{v}$
2) Montrer que l'ion atteint une vitesse limite $\vec{v}_{lim}=\mu\vec{E}$. Exprimer la mobilité *μ* de l'ion de charge *q* en fonction des données.
3) Calculer numériquement la vitesse limite d'un ion Fe^{2+} sachant que m = 1,0 .10^{-21} g ; q = 2e ; r = 5,0 .10^{-11} m ; $\eta=1{,}0.10^{-2}\,\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}$; E_0 = 200 V.m^{-1} ; e = 1,6.10^{-19} C

B. Le champ électrique est sinusoïdal: $\vec{E}=E_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$

4) On cherche la vitesse en régime forcé sous la forme $\vec{v}=V\cos(\omega t+\varphi)\vec{u}_x$, définir pour cela l'amplitude complexe de la vitesse notée $\underline{V}$.
5) Trouver l'expression de l'amplitude complexe $\underline{V}$ en fonction de ω et des données nécessaires.
6) Quelle relation existe entre $\underline{V}$, $\underline{X}$ (l'amplitude complexe des oscillations) et ω . En déduire $\underline{X}$ en fonction des données nécessaires.

<u>Partie 2 : électronique du conductimètre</u>

Un conductimètre contient entre autres, un générateur sinusoïdal (utilisant un pont de Wien) et un convertisseur tension -courant.

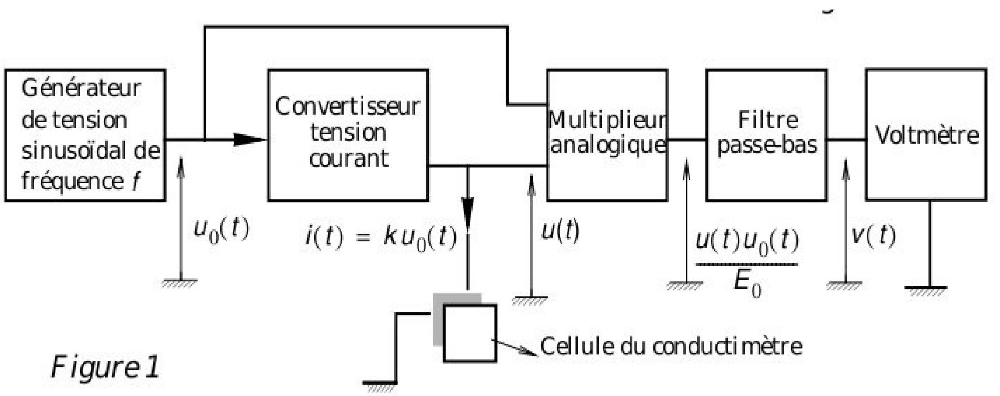


Figure 1

A. Étude du pont de WIEN

Soit le filtre ci-dessous (figure 2) où les résistances sont identiques et les capacités aussi.

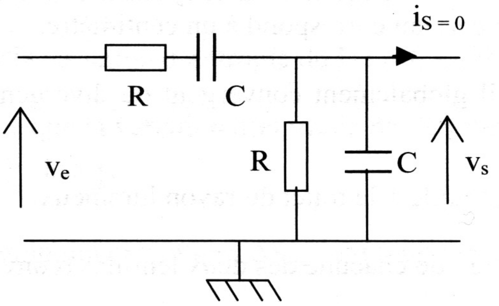


figure 2

Le filtre est alimenté par une tension d'entrée $v_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$. A la sortie, on a alors une tension $v_S(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi)$. Il n'y a pas de charge à la sortie.

7) En analysant par des schémas équivalents son comportement en basses et hautes fréquences, déterminer la nature de ce filtre.

8) Établir la fonction de transfert sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_S}}{\underline{v_e}} = \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ en précisant les valeurs de *A* et *Q* et l'expression de ω_0 en fonction de *R* et *C*.

9) Définir et exprimer le gain *G(ω)* de ce filtre. Pour quelle valeur de *ω* le gain est-il maximal ? Quelle est alors la valeur G^{max} du gain ?

Le filtre est à présent alimenté par une tension d'entrée quelconque $v_e(t)$ (pas forcément sinusoïdale).

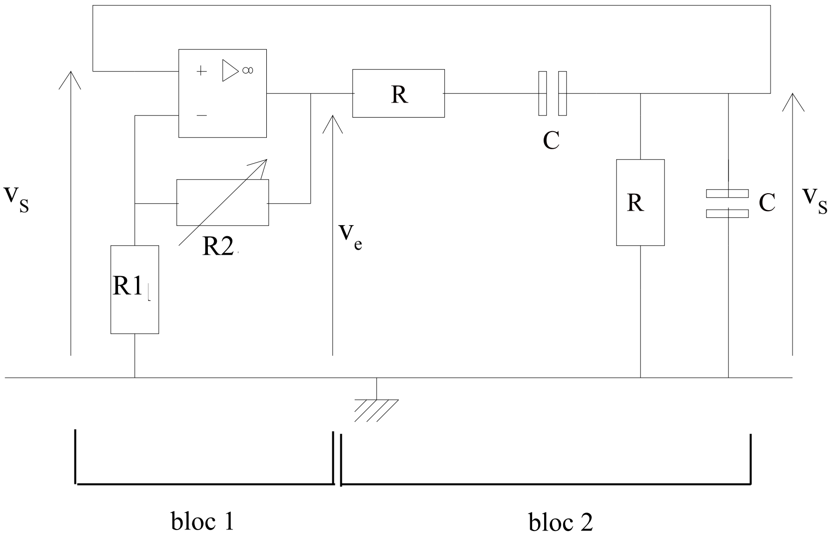
10) Montrer, en utilisant la fonction de transfert obtenue précédemment, que l' équation différentielle liant $v_S(t)$ et $v_e(t)$ est :

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \frac{A\,\omega_0}{Q}\frac{dv_e}{dt}$$

B. Générateur de signaux sinusoïdaux.

Le filtre de Wien (figure 3 ; bloc 2) est couplé à un amplificateur opérationnel idéal dont le fonctionnement est supposé linéaire (figure 3 – bloc 1). Aucune connaissance préalable sur l'amplificateur opérationnel n'est requise pour traiter la suite du problème.

figure 3



Pour le bloc 1, ayant pour entrée v_s et pour sortie v_e, on donne : $v_e(t)=\frac{R_1+R_2}{R_1}v_s(t)$. On a donc un gain $G_1=\frac{v_e}{v_s}=\frac{R_1+R_2}{R_1}$.

11) Montrer que l'équation différentielle suivie par $v_s(t)$ est :

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}[1-Q(\frac{R_1+R_2}{R_1})]\frac{dv_s}{dt}+\omega_0^2 v_s=0$$

12) À quelle condition sur R_1 et R_2 la solution de cette équation est-elle purement sinusoïdale ?
13) Quel est alors le gain G_1 du bloc 1 ? Quel était le gain G_2 du bloc 2 quand $\omega=\omega_0$? Et quand $\omega=2\omega_0$?
14) En raisonnant sur la valeur du produit G_1G_2, proposer une interprétation qualitative du fonctionnement de générateur de signaux sinusoïdaux.
15) On désire réaliser un générateur de signaux sinusoïdaux de fréquence f = 1000 Hz. Proposer des valeurs numériques réalistes pour les différents composants.