

PROGRAMME DE COLLES N° 15

Semaine du 20/01/2025 au 24/01/2025

👉 *Matrices* 👈

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 12 : matrices —

Tout le chapitre.

1 Matrices et opérations algébriques

- 1.1 L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices rectangulaires
- 1.2 Combinaisons linéaires de matrices
- 1.3 Produits de matrices
- 1.4 Propriétés de la multiplication matricielle
- 1.5 Transposition
- 1.6 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

2 L'algèbre des matrices carrées

- 2.1 Puissances de matrices, règles usuelles, cas de matrices qui commutent
- 2.2 Matrices nilpotentes, indice de nilpotence
- 2.3 Matrices diagonales, effet de la multiplication par une matrice diagonale à droite/gauche
- 2.4 Matrices triangulaires
- 2.5 Matrices symétriques, antisymétriques, « supplémentarité » des sev correspondants
- 2.6 Trace d'une matrice carrée, propriétés élémentaires

3 Matrices et systèmes linéaires

- 3.1 Écriture matricielle d'un système linéaire
- 3.2 Structure vectorielle de l'ensemble des solutions homogènes, affine de l'ensemble des solutions générales
- 3.3 Opérations élémentaires et multiplication matricielle

4 Inversibilité, groupe linéaire

- 4.1 Généralités
- 4.2 Inverse et opérations
- 4.3 Inversibilité de certains types de matrices
- 4.4 Inversibilité et systèmes linéaires
- 4.5 Calcul effectif de l'inverse
- 4.6 Application aux matrices triangulaires

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 12. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure avec expression des coefficients diagonaux.
- Chapitre 12. Démontrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de façon unique $S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique.
- Chapitre 12. Unicité de l'inverse quand elle existe et stabilité de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ par produit, inverse transposition avec formule des inverses.
- Chapitre 12. Inversibilité des matrices (2,2) et expression de l'inverse.
(On fera le calcul de $A^2 - (\text{Tr } A)A + (\det A)I_2$.)

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre $x|x| \leq 3x + 2$, montrer que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$ sur $[0; 1]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - 3i$, les racines carrées de $3 - 4i$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, écrire $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$, de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, de $x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : $\int^x \cos t e^{2t} dt$, $\int_0^1 t e^t dt$, $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.