

DM06 : (pour lundi 13/01)

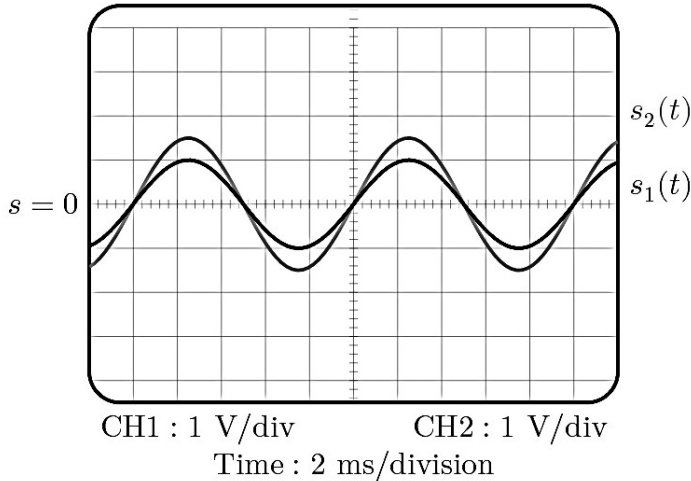
Partie 1 : Filtrage d'un signal musical

(extrait sujet Centrale Supélec 2015)

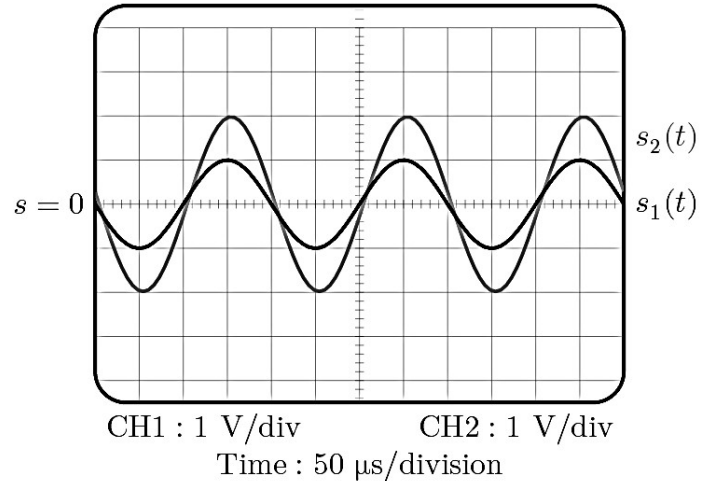
On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute-fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées, qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant la numérisation, le signal doit être filtré. Un document (en annexe, à la fin de ce problème) fournit les spécifications du LMF100, qui est un composant intégré. Il réalise différents types de filtrage, selon les branchements qu'on lui applique. Dans ce document, la grandeur s est égale à $j\omega$, où ω est la pulsation des signaux sinusoïdaux et $j^2 = -1$.

- 1 Quel type de filtre doit-on utiliser et pourquoi ? Préciser la bande de fréquences qu'il doit sélectionner.
- 2 Quatre essais ont été réalisés en laboratoire, à quatre fréquences différentes, avec un filtre d'ordre 2 réalisé avec le LMF 100. Sur les 4 oscillogrammes relevés ci-dessous, $s_2(t)$ désigne la tension de sortie du filtre et $s_1(t)$ la tension d'entrée. **Déduire de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre, facteur de qualité, fréquence de coupure f_c . Expliciter clairement la démarche et commenter les résultats obtenus.**

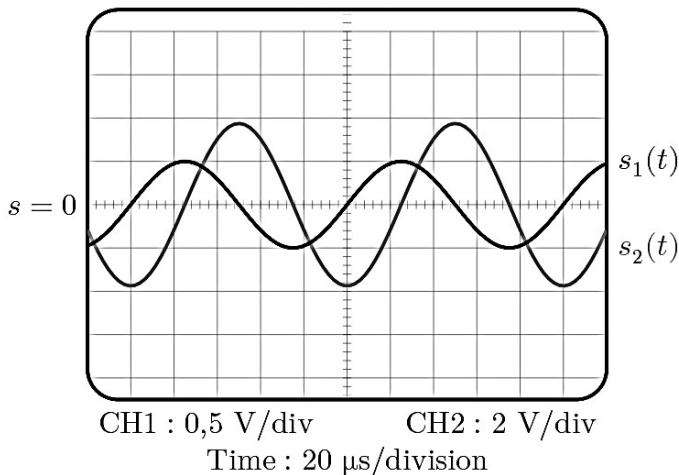
Essai 1



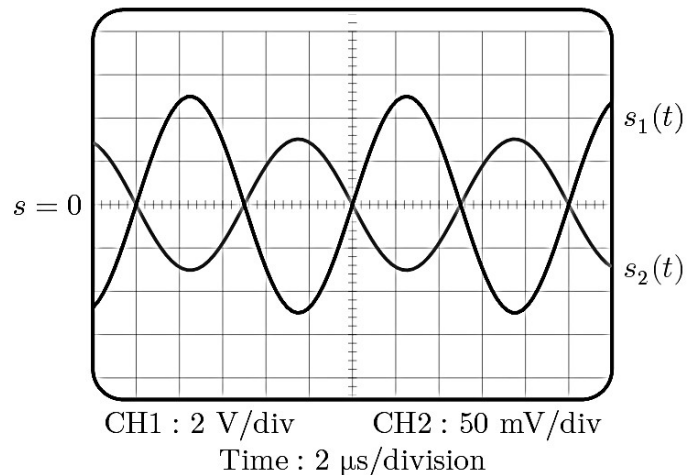
Essai 2



Essai 3



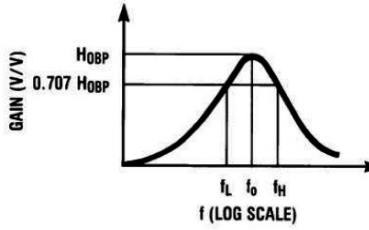
Essai 4



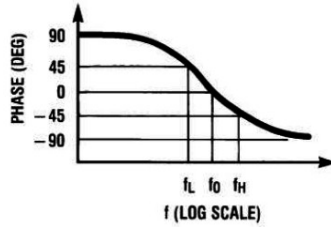
Annexe

Filtres réalisables avec le LMF100

$$H_{BP}(s) = \frac{H_{OBP} \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(a)



(b)

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L}; f_0 = \sqrt{f_L f_H}$$

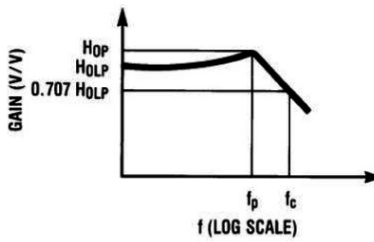
$$f_L = f_0 \left(\frac{-1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

$$f_H = f_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

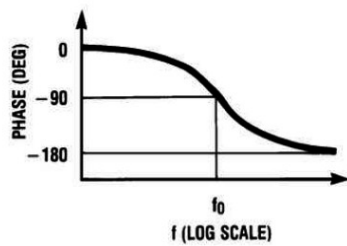
$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

FIGURE 1. 2nd-Order Bandpass Response

$$H_{LP}(s) = \frac{H_{OLP} \omega_0^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(a)



(b)

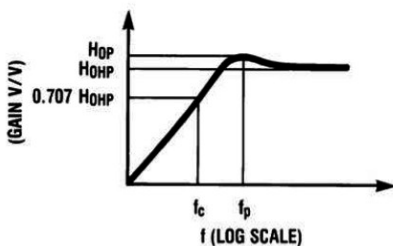
$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

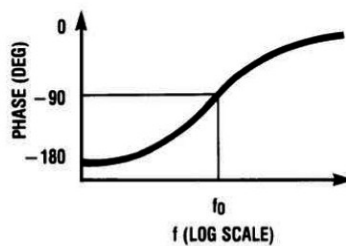
$$H_{OP} = H_{OLP} \times \frac{1}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 2. 2nd-Order Low-Pass Response

$$H_{HP}(s) = \frac{H_{OHP} s^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(b)



$$f_c = f_0 \times \left[\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}} \right]$$

$$f_p = f_0 \times \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \right]^{-1}$$

$$H_{OP} = H_{OHP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

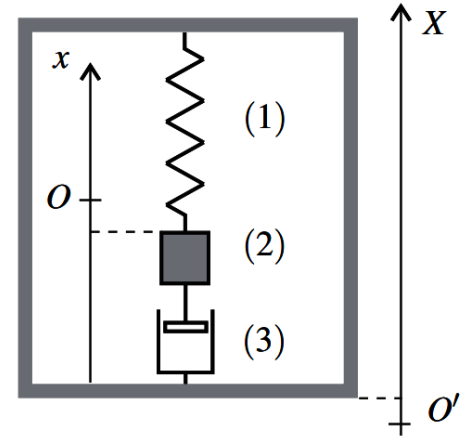
FIGURE 3. 2nd-Order High-Pass Response

Partie 2 :étude d'un sismomètre

Le principe d'un sismomètre est schématisé sur la figure ci-contre. Un ressort (1) de masse négligeable, dont la réponse en élongation, linéaire, est caractérisée par une raideur k , est suspendu à un boîtier rigide lié au sol. Un solide (2), de masse m , est accroché à l'autre extrémité de ce ressort.

Une partie de ce solide est solidaire d'un amortisseur (3) exerçant sur (2) la force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h est une constante, et \vec{v} la vitesse de translation de (2) par rapport au boîtier.

Le passage d'une onde sismique provoque un mouvement du référentiel du boîtier par rapport au référentiel galiléen du sol qui est repéré par sa coordonnée $X(t)$ le long d'un axe (OX) .



Le mouvement de (2) dans le référentiel du boîtier est repéré par sa coordonnée $x(t)$ sur un axe (Ox) fixe par rapport au boîtier dont l'origine O correspond au point d'attache de (2) dans sa position d'équilibre en l'absence de mouvement du boîtier.

L'axe (Ox) , comme l'axe (OX) , est vertical ascendant. On étudie le mouvement $x(t)$ de (2) provoqué par le mouvement du boîtier $X(t)$.

On donne l'accélération de (2) dans le référentiel du sol R_0 en fonction $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{X}(t)$:

$$\vec{a}_M(t)_{R_0} = \ddot{X}(t)\vec{e}_x + \ddot{x}(t)\vec{e}_x$$

1. En écrivant le PFD appliqué au système dans le référentiel du sol, Établir l'équation différentielle suivante liant les variables $x(t)$ et $X(t)$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\sqrt{2}}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{d^2 X}{dt^2} \quad \text{avec } \omega_0 \text{ la pulsation propre du sismomètre à définir et}$$

$$\tau = \sqrt{2} \frac{m}{h} \quad \text{la constante de temps relative à l'amortissement.}$$

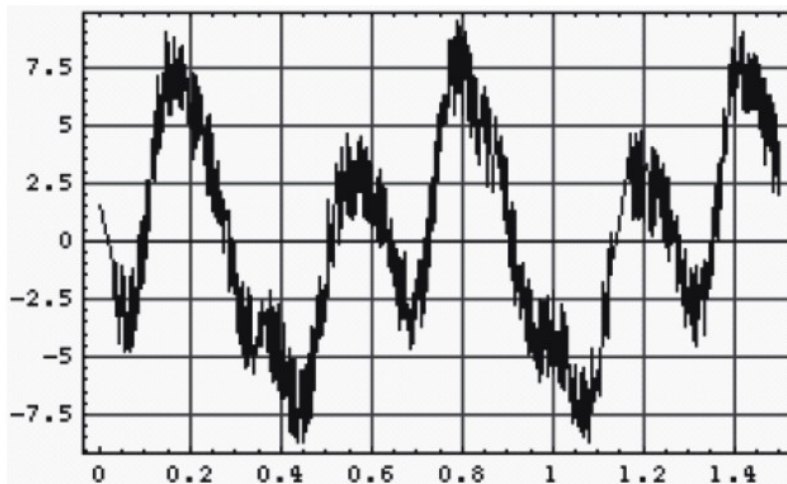
2. On considère une onde sismique sinusoïdale et de pulsation ω . En régime forcé, la fonction $x(t)$ est sinusoïdale elle aussi, et de même pulsation. Établir l'expression de la fonction de transfert mécanique :

$$H(j\omega) = \frac{x}{X}$$

3. Exprimer $G(\omega) = |H(j\omega)|$, le gain en décibel GdB (ω) et $\phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$

À quelle type de filtre correspond la fonction de transfert de l'accéléromètre ?

On suppose désormais que $\omega_0\tau = 1$ et que la pulsation propre du sismomètre est $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$, cet appareil détecte une onde sismique sous la forme de la fonction périodique $x(t)$ reproduite sur la figure ci-dessous ; l'amplitude est en unité arbitraire :



L'application d'un algorithme de transformée de Fourier à $x(t)$ fournit la décomposition en série de Fourier sous la forme $x(t) = c_0 + \sum_n c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$. avec $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

Les valeurs des coefficients c_n et des phases ϕ_n sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

n	c_n (unité arbitraire)	ϕ_n
0	0	
1	4	$-0,4\pi$
2	3,5	$0,6\pi$
3	2	$0,5\pi$
4	0	
5	1	$-0,6\pi$

5. On cherche à retrouver l'**excitation** sous la forme $X(t) = c'_0 + \sum_n c'_n \cos(n\omega t + \phi'_n)$.

Donner la relation entre c'_n , c_n et $G(n\omega) = |H(jn\omega)|$ d'une part, puis entre ϕ'_n , ϕ_n et $\phi(n\omega)$.

En déduire la valeur des c'_n et ϕ'_n . Tracer l'allure de $X(t)$ sur une période.

6. Comment devrait-on modifier les caractéristiques du sismomètre afin que l'enregistrement de $x(t)$ permette de déduire plus facilement $X(t)$? Quel sera dans ce cas la relation entre $x(t)$ et $X(t)$?