DM06 correction

Q1) Le signal possède des harmoniques élevées qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement.
C'est harmoniques élevées ont une fréquence élevée
Comme les sons audibles ont des fréquences entre 20 Hz et 20 kHz
On doit sélectionner les fréquences inférieures à 15 kHz environ avec un filtre passe-bas et couper les fréquences entre 15 kHz et 20 kHz.

Q2)
. Sur l'essai 1, une période correspond à 5 divisions $\Rightarrow T = 5 \times 2\,ms = 10\,ms$

donc $f = \frac{1}{T} = 100\,Hz$. À cette fréquence : $s_2(t) = S_0 \cos(\omega t)$
$s_1(t) = E_0 \cos(\omega t)$

avec $S_0 = 1{,}5\,V$ et $E_0 = 1\,V$

amplitude de $s_2(t)$; amplitude de l'entrée $s_1(t)$

donc $|\underline{H}(f = 100\,Hz)| = \frac{S_0}{E_0} = 1{,}5$

, Sur l'essai 4, une période T correspond à 5 divisions $\Rightarrow T = 5 \times 2\,\mu s$
$T = 10\,\mu s$

donc $f = \frac{1}{T} = 10^5\,Hz$. À cette fréquence $s_2(t) = -S_0 \cos(\omega t)$ s_1 et s_2
$s_1(t) = E_0 \cos(\omega t)$ en oppo de phase

avec $S_0 = 50 \times 25 = 75\,mV$

$s_2(t) = S_0 \cos(\omega t - \pi)$

$E_0 = 5\,V$

$\boxed{\varphi(f = 10^5\,Hz) = -\pi = -180°}$

donc $|\underline{H}(f = 10^5\,Hz)| = \frac{S_0}{E_0} = \boxed{0{,}01875}$

$\Rightarrow |\underline{H}(f = 10^5\,Hz)| < |\underline{H}(f = 100\,Hz)|$ le filtre est un passe bas

. Sur l'essai 3 à $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{100\,\mu s} = 10^4\,Hz \Rightarrow S_0 \simeq 3{,}8\,V$ $E_0 = 0{,}5\,V$

De plus les signaux sont en quadrature $s_1(t) = E_0 \cos(\omega t)$

$s_2(t) = S_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$\boxed{|\underline{H}(f = 10^4\,Hz)| = 7{,}6}$ et $\boxed{\varphi(f = 10^4\,Hz) = -\frac{\pi}{2} = -90°}$

On voit que la phase passe de 0 Hz à BF à 180 à HF
le filtre est donc un passe bas de fonction de transfert

$$\underline{H_{Lp}}(\omega) = \frac{H_{0Lp}\,\omega_0^2}{-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$ (2ème ordre)

D'après l'annexe pour $\omega = \omega_0$ ($f = f_0$)

$$\underline{H_{Lp}}(\omega_0) = \frac{H_{0Lp}\,\omega_0^2}{j\frac{\omega_0^2}{Q}}$$

donc $\varphi(\omega_0) = \arg(\underline{H_{Lp}}(\omega_0)) = -\arg\left(j\frac{\omega_0^2}{Q}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$

cela correspond à la phase observée à l'essai 3

donc $\boxed{f_0 = 10^4\,Hz}$ ← fréquence de l'essai 3 $f_0 = \frac{1}{T_0}$

Pour $f \ll f_0$ (essai 1) on a $\underline{H_{Lp}} \simeq \frac{H_{0Lp}\,\omega_0^2}{\omega_0^2} \simeq H_{0Lp}$

donc $|H(\underline{100\,Hz})| \simeq \boxed{H_{0Lp} = 1,5}$

or
$|\underline{H_{Lp}}(\omega_0)| = H_{0Lp} \times Q$ donc $\boxed{Q = \frac{|\underline{H_{Lp}}(\omega_0)|}{H_{0Lp}}}$ A.N $Q = \frac{7,6}{1,5}$

$\boxed{Q \simeq 5,06}$

enfin $f_P = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \underline{9900\,Hz}$

$\underline{f_c = 15 \times 10^3\,Hz}$ ← le filtre coupe bien les hautes fréquences audibles (entre 15 kHz et 20 kHz)

comme le filtre est d'ordre 2 il est plus sélectif qu'un ordre 1

Correction Partie 2 DM06 :étude d'un sismomètre

1.

-On associe à au boîtier un référentiel R_1 et au sol un référentiel R_0.

-On dirige les axes (O'X) et (Ox) par un vecteur unitaire $\vec{e}_x$ ascendant.

-On modélise l'élément (2) de l'accéléromètre par un point matériel M

Ainsi, l'accélération de (2) dans le référentiel R_1 est donc donnée par $\vec{a}_M(t)_{R_1} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$

l'accélération du boîtier par rapport au sol correspond à l'accélération du référentiel R_1 par rapport au référentiel du R_0 du sol .

elle a donc pour expression: $\overrightarrow{a_{R_1/R_0}} = \ddot{X}(t)\vec{e}_x$

Par composition des accélération, l'accélération de (2)dans le référentiel du sol R_0 est donnée par la formule :

$$\boxed{\vec{a}_M(t)_{R_0} = \overrightarrow{a_{R_1/R_0}} + \vec{a}_M(t)_{R_1} = \ddot{X}(t)\vec{e}_x + \ddot{x}(t)\vec{e}_x}$$

2.

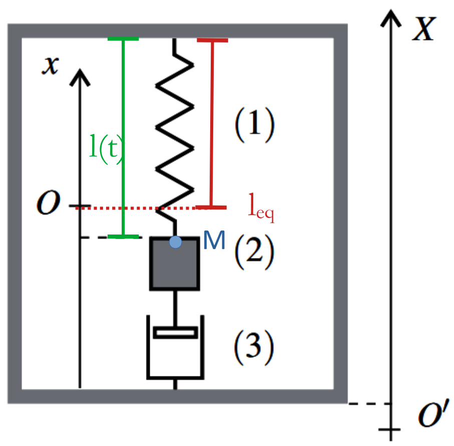
Les forces agissant sur le solide (2) sont :

- la force de l'amortisseur $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dfrac{dx}{dt}\vec{e}_x$.
- son poids $-mg\,\vec{e}_x$
- la force de rappel du ressort $\vec{T} = k(l(t)-l_0)\vec{e}_x$ où l_0 est la longueur à vide du ressort.

Attention ! Il n'y a pas de moins car l'axe est orienté vers le point d'attache du ressort au boîtier.

Ainsi quand $l(t)-l_0 > 0$, la force de rappel doit être dirigée selon + $\vec{e}_x$

D'après l'énoncé , l'origine O correspond au point d'attache de (2) dans sa position d'équilibre en l'absence de mouvement du boîtier.



On a $l(t) = l_{eq} - x(t)$
avec l_{eq} la longueur à vide du ressort en l'absence de mouvement du boîtier
(signe moins car quand $x(t) < 0$ le ressort est allongé donc $l(t) > l_{eq}$)

Ainsi $\vec{T} = k(l_{eq} - x(t) - l_0)\vec{e}_x$

D'autre part, lorsque le boîtier est immobile, la condition d'équilibre du solide (2) est : $-mg + k\,(l_{eq} - l_0) = 0$

$$l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

Finalement la force de rappel du ressort a pour expression : $\vec{T} = k(l_0 + \dfrac{mg}{k} - x(t) - l_0)\vec{e}_x = k(\dfrac{mg}{k} - x(t))\vec{e}_x$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit pour (2) dans le référentiel du sol et en projection sur (Ox) :

$$m\,\vec{a}_M(t)_{R_0}\cdot\vec{e}_x = -h\,\dot{x}(t) - mg + k(\frac{mg}{k} - x(t))$$

comme $\vec{a}_M(t)_{R_0}=\ddot{X}(t)\vec{e}_x+\ddot{x}(t)\vec{e}_x$ (Q1) on a donc $m(\ddot{X}(t)+\ddot{x}(t))=-h\dot{x}-mg+k(\frac{mg}{k}-x(t))$

$$\ddot{X}(t)+\ddot{x}(t)=\frac{-h}{m}\dot{x}(t)-\frac{k}{m}x(t)\Rightarrow\ddot{x}(t)+\frac{h}{m}\dot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=-\ddot{X}(t)$$

en posant $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \tau=\sqrt{2}\frac{m}{h} \quad \text{on a bien} \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\sqrt{2}}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=-\frac{d^2X}{dt^2}}$

3.

On passant à la notation complexe, l'équation trouvée à la question précédente devient :

$$-\omega^2\underline{x}+\frac{\sqrt{2}}{\tau}j\omega\underline{x}+\omega_0^2\underline{x}=-(-\omega^2)\underline{X}$$

on a donc $\boxed{\frac{\underline{x}}{\underline{X}}=\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2+\frac{\sqrt{2}}{\tau}j\omega}}$

4.

$$\boxed{G(\omega)=|\underline{H}(j\omega)|=\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+2\frac{\omega^2}{\tau^2}}} \qquad \phi(\omega)=arg(\underline{H}(j\omega))=arg(\omega^2)-arg(\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\sqrt{2}}{\tau}\omega)}$$

À haute fréquence $\omega\gg\omega_0$: on a $G(\omega)=\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2)^2}}=1$ l'accéléromètre n'atténue pas les hautes fréquences

À basse fréquence $\omega\gg\omega_0$: $G(\omega)=\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2)^2}}=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ donc $GdB(\omega)=20\log(\frac{\omega^2}{\omega_0^2})=40\log(\omega)-40\log(\omega_0)$

L'accéléromètre atténue donc les basses fréquences et la courbe réelle de gain en décibel tend asymptotiquement vers une droite de pente +40 dB/décade à BF

le filtre correspondant est donc **passe haut**, plus précisément un passe haut d'ordre 2.

5.6.7

Si on considère un signal sinusoïdal $c'_n\cos(n\omega t+\varphi'_n)$ en entrée , on a un signal en sortie du sismomètre de même pulsation mais déphasé et d'amplitude différente : $c_n\cos(n\omega t+\varphi_n+\varphi(n\omega))$

le lien entre ces deux signaux est donné par la fonction de transfert :

$\boxed{G(n\omega)=|\underline{H}(jn\omega)|=\frac{c_n}{c'_n}}$ (attention les coefficient c'_n sont associés à l'entrée et pas à la sortie)

$\boxed{c'_n=\frac{c_n}{|\underline{H}(jn\omega)|}}$ (on utilise donc la fonction de transfert « à l'envers » par rapport à d'habitude)

de plus $\phi_n=\phi'_n+\phi(n\omega)$ soit $\boxed{\phi'_n=\phi_n-\phi(n\omega)}$

Pour cette question, d'après l'énoncé $\omega_0\tau=1$ donc $G(\omega)=|\underline{H}(j\omega)|=\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+2\omega^2\omega_0^2}}$

de même $\phi(\omega)=arg(\underline{H}(j\omega))=arg(\omega^2)-arg(\omega_0^2-\omega^2+j\sqrt{2}\omega\omega_0)=-arg(\omega_0^2-\omega^2+j\sqrt{2}\omega\omega_0)$

Comme d'après l'énoncé $\omega_0 = 20 rad.s^{-1}$ et $\omega = 10 rad.s^{-1}$ on a $G(\omega)=\frac{10^2}{\sqrt{(20^2-10^2)^2+2\times10^2\times20^2}}$

et $\phi(\omega)=-arg(20^2-10^2+j\sqrt{2}\times10\times20)$

de plus $G(n\omega)=\frac{n^2 10^2}{\sqrt{(20^2-n^2 10^2)^2+2\times n^2\times10^2\times20^2}}$

Les coefficients de la décomposition en série de Fourier X(t) sont calculés dans le tableau ci-dessous:

n	c_n	ϕ_n	$c'_n=\frac{c_n}{G(n\omega)}$	$\phi'_n=\phi_n-\phi(n\omega)$
0	0		$c'_0=\frac{c_0}{G(0)}=0$	Pas nécessaire de la calculer car $c'_0=0$
1	4	-0,4π	$G(1\omega)=\frac{10^2}{\sqrt{(20^2-10^2)^2+2\times10^2\times20^2}}=0{,}243$ $c'_1=\frac{c_1}{G(\omega)}=\frac{4}{0{,}243}=\mathbf{16{,}5}$	$\phi(\omega)=-arg(20^2-10^2+j\sqrt{2}\times10\times20)$ $\phi(\omega)=-\arctan(\frac{\sqrt{2}\times10\times20}{20^2-10^2})=-0{,}756=-0{,}24\pi$ $\phi'_1=\phi_1-\phi(\omega)=-0{,}4\pi+0{,}24\pi=\mathbf{-0{,}16\pi}$
2	3,5	0,6π	$G(2\omega)=\frac{2^2 10^2}{\sqrt{(20^2-2^2 10^2)^2+2\times2^2\times10^2\times20^2}}=0{,}707$ $c'_2=\frac{c_2}{G(2\omega)}=\frac{3{,}5}{0{,}707}=\mathbf{4{,}95}$	$\phi(2\omega)=-arg(20^2-4\times10^2+j\sqrt{2}\times2\times10\times20)$ $\phi(2\omega)=\frac{-\pi}{2}$ $\phi'_2=\phi_2-\phi(2\omega)=0{,}6\pi-(-0{,}5\pi)=\mathbf{1{,}1\pi}$
3	2	0,5π	$G(3\omega)=\frac{3^2 10^2}{\sqrt{(20^2-3^2 10^2)^2+2\times3^2\times10^2\times20^2}}=0{,}914$ $c'_3=\frac{c_3}{G(3\omega)}=\frac{2}{0{,}914}=\mathbf{2{,}188}$	$\phi(3\omega)=-arg(20^2-9\times10^2+j\sqrt{2}\times3\times10\times20)$ $\phi(3\omega)=-(\pi-\arctan(\frac{\sqrt{2}\times3\times10\times20}{9\times10^2-20^2}))=-0{,}67\pi$ *Ici la partie réelle est négative d'où le π-...* $\phi'_3=\phi_3-\phi(3\omega)=0{,}5\pi-(-0{,}67\pi)=\mathbf{1{,}17\pi}$
4	0		$c'_4=\frac{c_4}{G(4\omega)}=0$	Pas nécessaire de la calculer car $c'_4=0$
5	1	-0,6π	$G(5\omega)=\frac{5^2 10^2}{\sqrt{(20^2-5^2 10^2)^2+2\times5^2\times10^2\times20^2}}=0{,}987$ $c'_5=\frac{c_5}{G(3\omega)}=\frac{1}{0{,}987}=\mathbf{1{,}01}$	$\phi(5\omega)=-arg(20^2-5^2\times10^2+j\sqrt{2}\times5\times10\times20)$ $\phi(5\omega)=-(\pi-\arctan(\frac{\sqrt{2}\times5\times10\times20}{5^2\times10^2-20^2}))=-0{,}81\pi$ $\phi'_5=\phi_5-\phi(5\omega)=-0{,}6\pi-(-0{,}81\pi)=\mathbf{0{,}21\pi}$

Finalement en combinant les résultats :

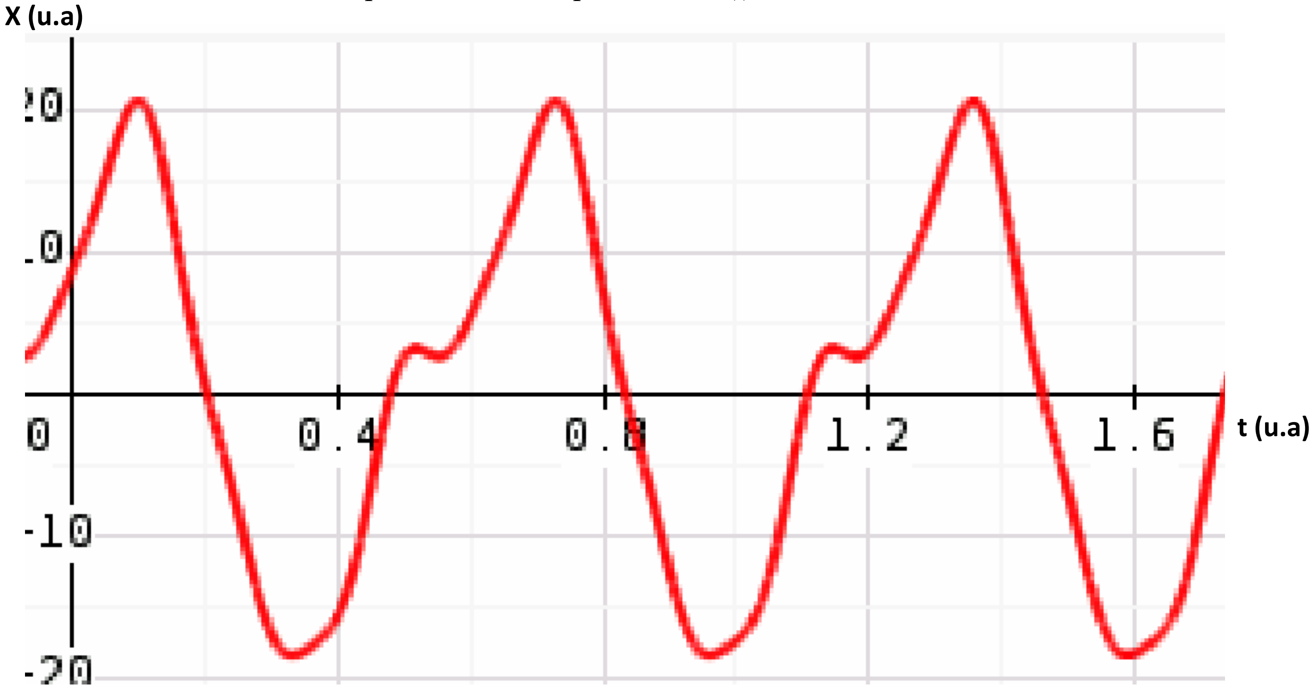
$$X(t)=16{,}5\cos(\omega t-0{,}16\pi)+4{,}95\cos(2\omega t+1{,}1\pi)+2{,}19\cos(3\omega t+1{,}17\pi)+1{,}01\cos(5\omega t+0{,}21\pi)$$

et comme ω =10 rad/s :

$$\boxed{X(t)=16{,}5\cos(10t-0{,}16\pi)+4{,}95\cos(20t+1{,}1\pi)+2{,}19\cos(30t+1{,}17\pi)+1{,}01\cos(50t+0{,}21\pi)}$$

le graphique peut s'obtenir à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un programme python :

Représentation temporelle de X(t)



8.

On aimerait que le signal x(t) soit proportionnel au signal d'entrée X(t) . C'est le cas pour des fréquences très supérieures à la fréquence de coupure du sismomètre, car quand $\omega >> \omega_0$ la fonction de transfert est $\underline{H(\omega)} = 1$

il faudrait donc **diminuer au maximum la pulsation de coupure du sismomètre pour que la condition $\omega >> \omega_0$ soient vérifiée pour toutes les fréquences des composantes sinusoïdales de l'entrée.**

Malheureusement cette condition ne sera jamais vérifiée pour la composante continue (de pulsation $\omega = 0$) elle sera toujours coupée même pour ω_0 très faible.

Comme $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, **pour diminuer la pulsation propre de l'accéléromètre on peut augmenter la masse de (2) ou diminuer la raideur du ressort.**

Si le signal d'entrée ne possède pas de composante continue, on aura simplement x(t)=X(t)