



Chap 14 : Superposition de 2 ondes

I Battements

I.1) Illustration expérimentale : battements acoustiques

Source 1 :
S₁  surpression $p_1(s_1, t) = P_0 \cos(2\pi f_1 t)$ avec $f_1 = \underline{445 \text{ Hz}}$

Source 2 :
S₂  surpression acoustique $p_2(s_2, t) = P_0 \cos(2\pi f_2 t)$
avec $f_2 = \underline{440 \text{ Hz}}$
(\hat{m} amplitude P_0 donc \hat{m} volume)

R.
↑
Recepteur

(t_z lephone avec phy porc
durée acquisition 500ms)

Signal reçu : superposition des signaux

$$p_{\text{tot}}(R, t) = p_1(R, t) + p_2(R, t) = P_0 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1(R)) + P_0 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2(R))$$

On utilise la formule : $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Déphasage
dû à la propagation

avec $p = 2\pi f_1 t + \phi_1$ $q = 2\pi f_2 t + \phi_2$

$$p_{\text{tot}}(R, t) = 2P_0 \cos\left(\frac{2\pi f_1 t + \phi_1 + 2\pi f_2 t + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi f_1 t + \phi_1 - (2\pi f_2 t + \phi_2)}{2}\right)$$

$$p_{\text{tot}}(R, t) = 2P_0 \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

on pose : $f_{\text{moy}} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ la fréquence moyenne

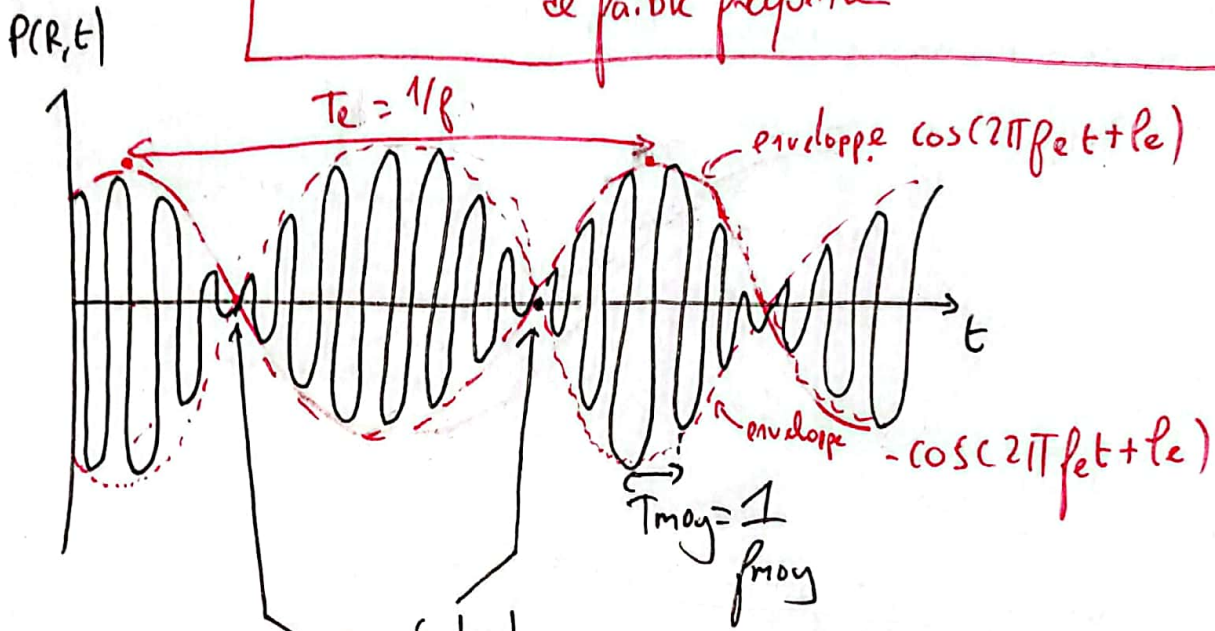
$$f_{\text{moy}} = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

$$f_e = \left| \frac{f_1 - f_2}{2} \right| \text{ la fréquence de l'enveloppe}$$

$$f_e = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$$

finalement :
$$P(R,t) = 2P_0 \cos(2\pi f_e t + \varphi_e) \cos(2\pi f_{moy} t + \varphi_{moy})$$

enveloppe cosinusoidale de faible fréquence (A savoir retrouver)



on n'entend plus de son à t_p tel que $\cos(2\pi f_e t_p + \varphi_e) = 0 \Leftrightarrow 2\pi f_e t_p + \varphi_e = \frac{p\pi + \pi}{2}$ $p \in \mathbb{Z}$

$$t_p = \left(\frac{p+1}{2} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{f_e} - \frac{\varphi_e}{2\pi f_e}$$

$p \in \mathbb{Z}$... durée entre 2 instants s où on n'entend plus le son:

$$T_b = t_{p+1} - t_p$$

$$T_b = \left[\left(\frac{p+1}{2} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{f_e} - \frac{\varphi_e}{2\pi f_e} - \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{f_e} + \frac{\varphi_e}{2\pi f_e} \right]$$

à savoir retrouver

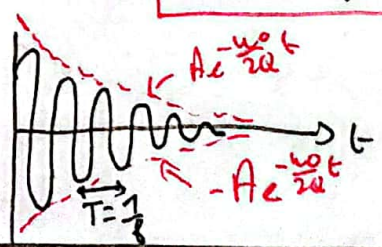
$$T_b = \frac{1}{2f_e} \quad (\Rightarrow) \quad T_b = \frac{1}{2|f_1 - f_2|} \quad (\Rightarrow)$$

$$f_b = |f_1 - f_2|$$

$$T_b = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$

A.N : $|f_1 - f_2| = 5 \text{ Hz}$ $T_b = \frac{1}{5} = 0,2 = 200 \text{ ms}$

Rmq analogie avec $Z(t) = A e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(2\pi f t + \varphi)$
enveloppe expo



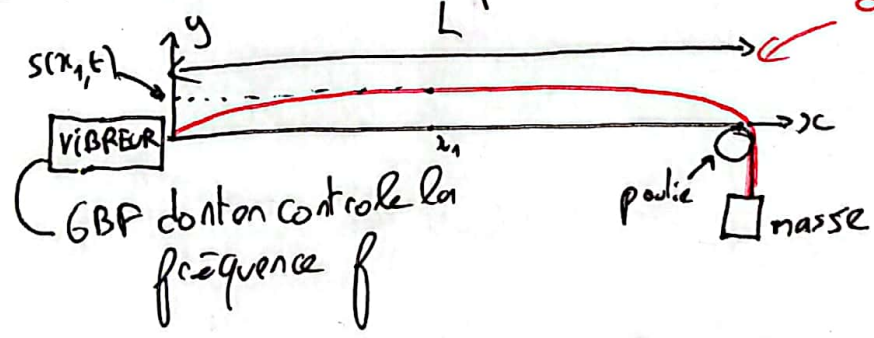
I.2) Intérêt de l'analyse des battements

On peut accorder un instrument de musique désaccordé à partir d'un instrument déjà accordé :

- on joue les 2 en m^{ême} tps : si on entend battement $f_1 \neq f_2$ on modifie la fréquence de l'instrument désaccordé jusqu'à ce que $f_1 = f_2$ ($T_b = \frac{1}{f_1 - f_2}$ va progressivement \uparrow) battement de t^{emps} rapide

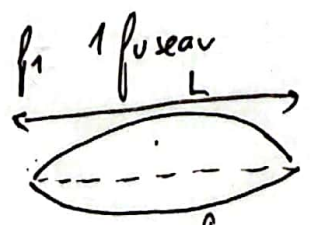
II Ondes stationnaires

II.1) Illustration exp^{erimentale}: la corde de Melde

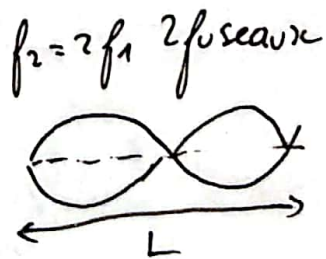


dispositif appelé corde de Melde (voir TP...)
Voici anim

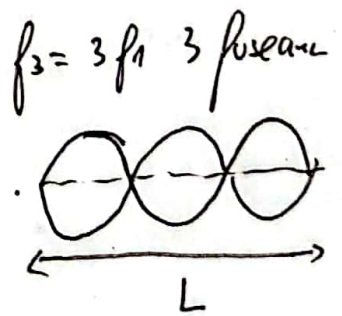
Observations: \exists fréquences f_n telles qu'en certains points l'amplitude de vibration est nulle
(voir vidéo)



f_1 1 fuseau
Persistence rétinienne
l'œil voit une superposition des positions de la corde



$f_2 = 2f_1$ 2 fuseaux



$f_3 = 3f_1$ 3 fuseaux
On peut voir la corde à l'aide d'un stroboscope quand la corde semble immobile car:

$$f_{\text{stroboscope}} = \frac{f_{\text{corde}}}{K} \quad K \in \mathbb{N}^*$$

Rmq: les phases dépendent aussi de L la longueur de la corde

Rmq2: on observe que l'onde ne se propage pas: on parle d'onde stationnaire

~~$$S(x,t) = S(x_2, t + \tau)$$~~

↑ impossible à écrire ici

II.2) Déf et forme de l'onde stationnaire

On considère la propa de 2 ONS de même f et même Amplitude
 mais se propagent dans des sens opposés: (voir animation)

$$S_+(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_+) \quad \text{propage } \rightarrow$$

$$S_-(x,t) = A \cos(\omega t + kx + \phi_-) \quad \text{propage } \leftarrow$$

$$(\omega = 2\pi f)$$

L'onde résultante $S(x,t)$ est la superposition des 2 ondes:

$$S(x,t) = S_+(x,t) + S_-(x,t)$$

$$S(x,t) = A_0 \left(\cos(\omega t - kx + \phi_+) + \cos(\omega t + kx + \phi_-) \right)$$

$$\text{or } \cos q + \cos p = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

ici

$$\begin{cases} p = \omega t + kx + \phi_- \\ q = \omega t - kx + \phi_+ \end{cases}$$

$$\frac{p+q}{2} = \frac{2\omega t + \phi_- + \phi_+}{2} = \omega t + \frac{\phi_- + \phi_+}{2}$$

$$\frac{p-q}{2} = kx + \frac{\phi_- - \phi_+}{2}$$

$$S(x,t) = 2A_0 \cos \left(\omega t + \frac{\phi_- + \phi_+}{2} \right) \cos \left(kx + \frac{\phi_- - \phi_+}{2} \right)$$

dépend seulement de t

dépend seulement de x

À retenir: pour une onde stationnaire on n'a plus $S(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$ ou $g(x - ct)$

les variables x et t sont découplées

$$S(x,t) = f(t) \times g(x)$$

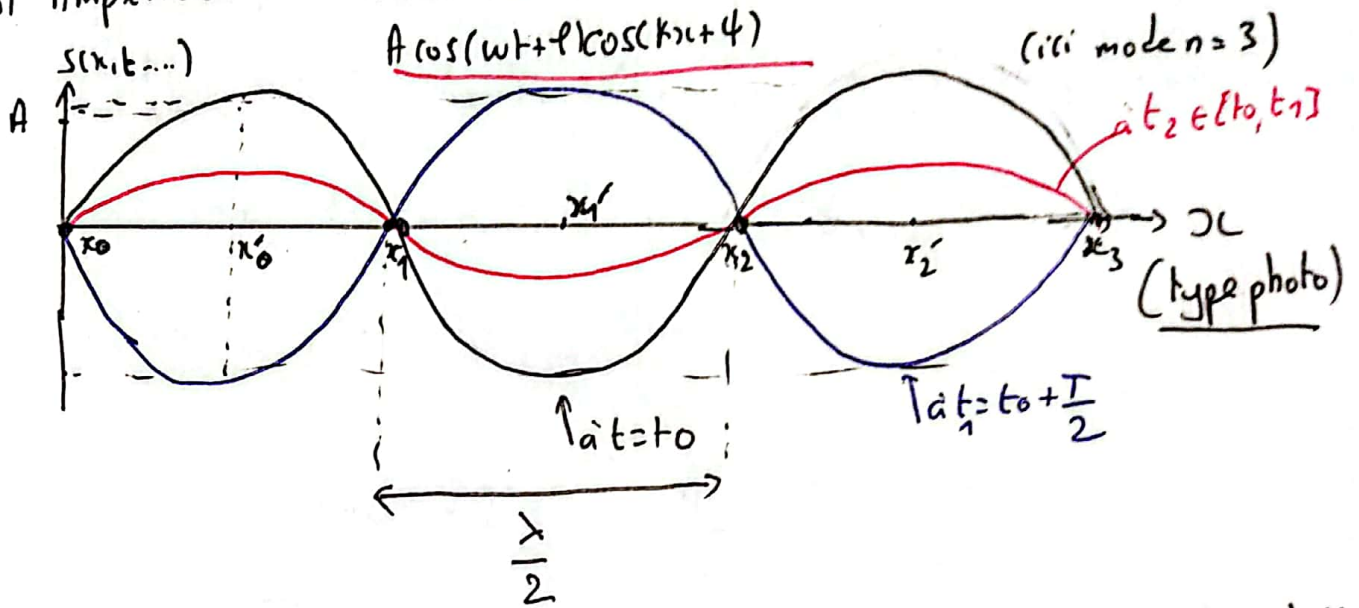
onde stationnaire

si onde stat harmonique:

$$S(x,t) = \underbrace{A \cos(\omega t + \phi)}_{f(t)} \cos \underbrace{(kx + \psi)}_{g(x)}$$

II.3) Nœuds et ventres

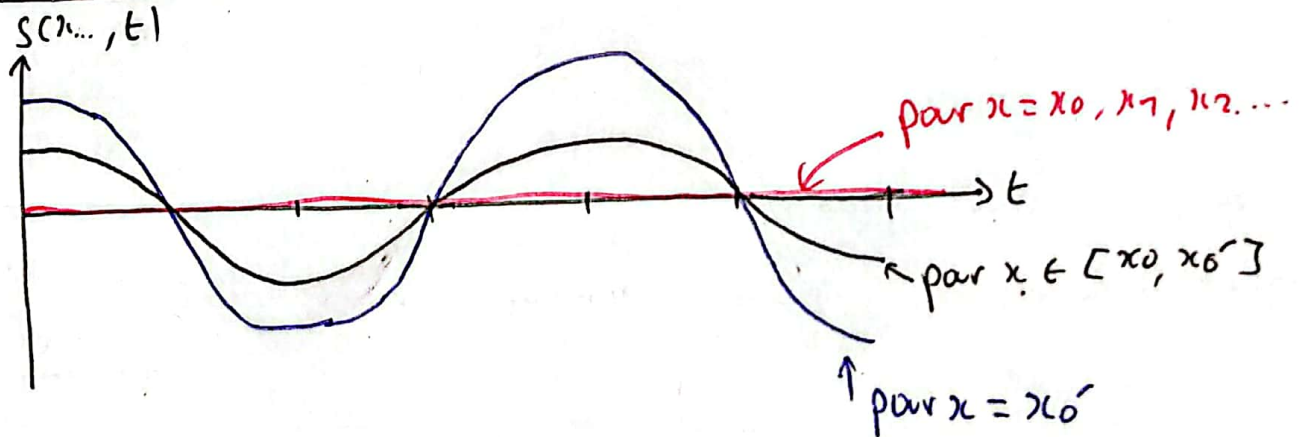
a) Amplitude d'une onde stationnaire (harmonique)



∃ des points x_p $\forall t$ $s(x_p, t) = 0$ ← (Amplitude nulle à tout instant)

∃ des points x'_k $\forall t$ $s(x'_k, t) = \pm A \cos(\omega t + \varphi)$
(Amplitude extrême à t par rapport aux autres x)

méthode type capteur



L'amplitude de l'onde dépend de la position x

(≠ de l'onde progressive sinusoïdale)

Ici: $A(x) = |A \cos(kx + \psi)|$

b) Nœuds de vibration

Nœud de vibration = un point d'abscisse x_N tq: $s(x_N, t) = 0 \forall t$

$(\Rightarrow) \forall t \quad A \cos(kx_N + \psi) \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad (1)$

$A \neq 0$ et $\exists t$ tq $\cos(\omega t + \varphi) \neq 0$ donc

$(1) \Rightarrow \cos(kx_N + \psi) = 0 \Rightarrow kx_N + \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$

$x_N = \frac{\pi}{2k} + \frac{p\pi}{k} - \frac{\psi}{k} \quad p \in \mathbb{Z} \text{ comme } k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$x_N = \frac{\pi}{2 \times \frac{2\pi}{\lambda}} + \frac{p\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} + \frac{\psi}{\frac{2\pi}{\lambda}} \Rightarrow x_{N,p} = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} p + \lambda \frac{\psi}{2\pi} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$
à retrouver

distance entre 2 nœuds : $d_{\text{nœuds}} = x_{N,p+1} - x_{N,p} = x_{N,1} - x_{N,0}$

$x_{N,0} = \frac{\lambda}{4} + \lambda \frac{\psi}{2\pi}$
 $x_{N,1} = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \lambda \frac{\psi}{2\pi}$

$d_{\text{nœuds}} = \frac{\lambda}{2}$

les nœuds sont espacés de $\frac{\lambda}{2}$ ♥

c) Ventres de vibration

Ventre de vibration = point d'abscisse x_V tq: $s(x_V, t) = \pm A \cos(\omega t + \varphi) \forall t$

$(\Rightarrow) \forall t \quad A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx_V + \psi) = \pm A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2) \quad \heartsuit$

$\exists t$ tq $\cos(\omega t + \varphi) \neq 0 \Rightarrow \cos(kx_V + \psi) = \pm 1$

$kx_V + \psi = p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$

$x_V = \frac{p\pi}{k} - \frac{\psi}{k} = p \frac{\lambda}{2} - \lambda \frac{\psi}{2\pi} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$
à retrouver

distance entre 2 ventres $d_{\text{ventres}} = x_{V,p+1} - x_{V,p} \Rightarrow d_{\text{ventres}} = \frac{\lambda}{2}$

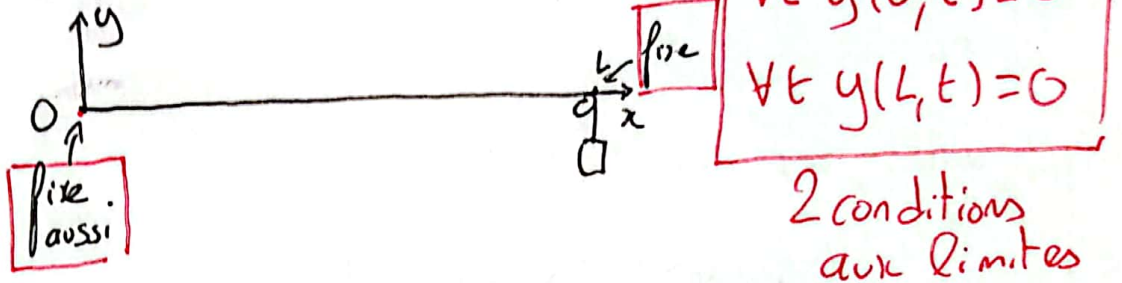
♥ Les ventres sont aussi espacés de $\frac{\lambda}{2}$

II.4) Modes propres

a) Les modes propres: conséquences des conditions aux limites (CL)

On considère une corde pouvant vibrer mais fixe à ses extrémités
(\neq corde de Melde ou une extrémité libre)

(Résonance)



objectif: trouver les caractéristiques d'une onde stationnaire harmonic
existant sur cette corde avec ces CL

Onde stat harmo: $y(x,t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \phi)$

utilisant des C.L: $y(0,t) = 0 \Rightarrow A \cos(\psi) \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad \forall t$

$$A \neq 0, \exists t \text{ tq } \cos(\omega t + \phi) \neq 0 \Rightarrow \cos(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi$$

$$\text{si } \psi = \frac{\pi}{2} \quad \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(kx)$$

$$\text{si } \psi = -\frac{\pi}{2} \quad \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(kx)$$

finalement avec 1 CL $y(x,t) = \pm A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi)$

2ème C.L: $y(L,t) = 0 \Rightarrow \pm A \sin(kL) \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad \forall t \quad (*)$

$$A \neq 0, \exists t \text{ tq } \cos(\omega t + \phi) \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\sin(kL) = 0}_{(*)} \Rightarrow \boxed{KL = p \times \pi}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$

ici $L > 0$ et par définito $k > 0$ donc $p \in \mathbb{N}$ et $K = \frac{p \times \pi}{L}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$
à retrouver \rightarrow

À retenir : les 2 CL imposent au vecteur d'onde (pulsat° spatiale k)^② de prendre seulement des valeurs discrètes précises

$$k_p = p \times \frac{\pi}{L} \text{ avec } p \in \mathbb{N}$$

$$k_1 = \frac{\pi}{L}, k_2 = \frac{2\pi}{L}$$

$$k_3 = \frac{3\pi}{L} \text{ etc...}$$

on exclut $p=0$ car $k \neq 0$

on exclut $p < 0$ car $k > 0$

mais $k = 3, 2\pi/L$ impossible ^{par exemple}

b) Expression et caractéristiques des modes propres

$$S_p(x,t) = \pm A \sin(k_p x) \cos(\omega t + \varphi)$$

or $k_p = p \times \frac{\pi}{L}$ et $\omega = kc \Leftrightarrow \omega_p = k_p c \Leftrightarrow \omega_p = p \times \frac{\pi c}{L}$ ♥

$$S_p(x,t) = \pm A \sin\left(p \times \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(p \frac{\pi c}{L} t + \varphi\right) \quad p \in \mathbb{N}^+$$

mode propre p

on peut compenser le moins en changeant φ en $\varphi + \pi$
donc on garde que la solut° avec le + A...

Un ensemble discret ($p=1, 2, 3, \dots$) d'ondes stat peut exister

fréquence propre

Chaque mode propre possède une fréquence f_p or $\omega_p = 2\pi f_p$

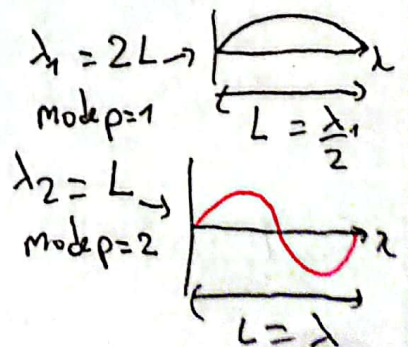
$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = p \frac{\pi c}{2\pi \times L} \Rightarrow f_p = p \times \frac{c}{2L} \quad p \in \mathbb{N}^+$$

Voilà on dit que la fréquence est quantifiée

$$f_p = p \times f_1 \text{ avec } f_1 = \frac{c}{2L}$$

de même $\lambda_p = \frac{c}{f_p} = \frac{c}{p \times \frac{c}{2L}} \Rightarrow \lambda_p = \frac{2L}{p}, p \in \mathbb{N}^+$

la longueur d'onde est aussi quantifiée



Célérité des ondes

$$f_p = p \times \frac{c}{2L} \Rightarrow c = \frac{2L}{p} f_p \quad p \in \mathbb{N}^+ \quad \text{notamment pour } p=1$$

$c = 2L f_1$ ^(*) on peut déterminer c connaissant L et la fréquence du mode $p=1$ (fondamentale)

ODG pour la corde de Melde

$$f_1 \approx 10 \text{ Hz} \quad L \approx 1 \text{ m} \Rightarrow \underline{c \approx 20 \text{ m/s}}$$

c) lien avec la musique

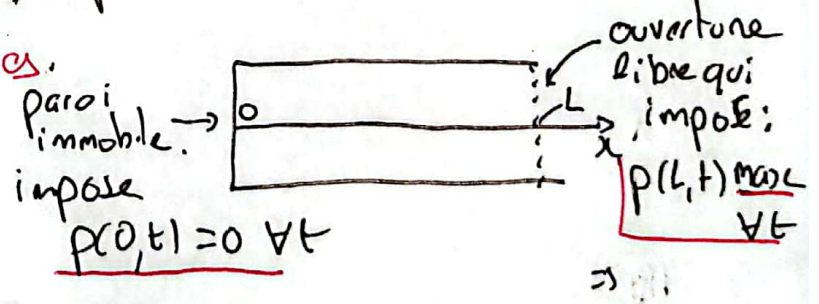
c'est la fréquence du mode fondamental ($p=1$) qui détermine

la hauteur de la note jouée (La, Do, etc.)

$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

si $L \downarrow$, $f \uparrow$ logique
↑ on pose le doigt sur la corde

Les fréquences des modes propres $p > 1$ déterminent le timbre de l'instrument
Pour les instruments à vent la supression $p(x,t)$ est une onde stationnaire qui vérifie des conditions aux limites.



c) generalisation à une onde quelconque

Une onde stationnaire quelconque est une superposition des modes propres

$$y(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} A_p \sin\left(p \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(p \frac{\pi c}{L} t + \phi_p\right)$$

onde quelconque



III Interférences

III.1) Condition nécessaire d'observation

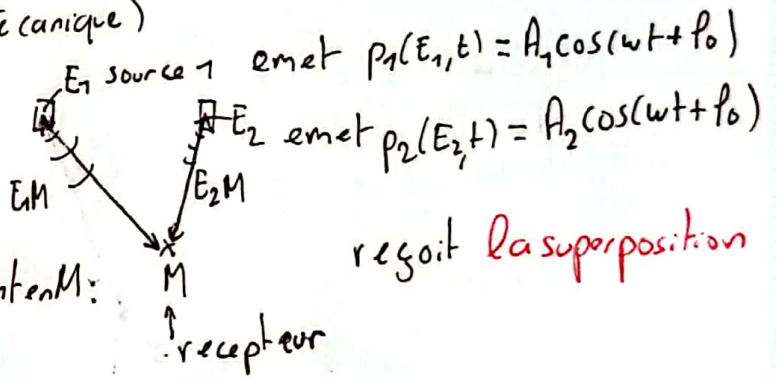
Les signaux qui se superposent doivent être synchrones = de même fréquence

III.2) Interférences acoustiques (ou mécanique)

a) Illustration expé (anim)

L'onde résultante en M est

la superposition des ondes qui arrivent en M:



$$P_{tot}(M, t) = p_1(M, t) + p_2(M, t)$$

$$P_{tot}(M, t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1(M)) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2(M))$$

avec $\phi_1(M) = E_1 M \times \frac{2\pi}{\lambda} + \phi_0$ et $\phi_2(M) = E_2 M \times \frac{2\pi}{\lambda} + \phi_0$ ← déphasage dû à la propagation

b) Amplitude de l'onde résultante

à priori on peut mettre $P_{tot}(M, t)$ sous la forme $P_{tot}(M, t) = A_{tot} \cos(\omega t + \psi)$ avec $\omega = 2\pi f$

On cherche à exprimer A_{tot} en fonction de A_1, A_2, ϕ_1 et ϕ_2

$$P_{tot}(M, t) = A_{tot} \cos(\omega t + \psi) = A_{tot} \cos \psi \cos \omega t - A_{tot} \sin \psi \sin \omega t \quad (1)$$

$$\text{or } P_{tot}(M, t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1(M)) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2(M))$$

$$= A_1 (\cos \omega t \cos \phi_1 - \sin \omega t \sin \phi_1) + A_2 (\cos \omega t \cos \phi_2 - \sin \omega t \sin \phi_2)$$

$$P_{tot}(M, t) = \underbrace{(A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2)}_{A_{tot} \cos \psi} \cos \omega t - \underbrace{(A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2)}_{A_{tot} \sin \psi} \sin \omega t$$

$A_{tot} \cos \psi$ (Par id avec (1)) $A_{tot} \sin \psi$

$$\begin{cases} A_{tot} \cos \psi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad (L_1) \\ A_{tot} \sin \psi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 \quad (L_2) \end{cases} \text{ Or } \cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$$

Astuce: $(L_1)^2 + (L_2)^2 \Rightarrow A_{tot}^2 \cos^2 \psi + A_{tot}^2 \sin^2 \psi = (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2)^2 + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2)^2$

$$A_{tot}^2 (\underbrace{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi}_1) = A_1^2 (\underbrace{\cos^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_1}_1) + A_2^2 (\underbrace{\cos^2 \phi_2 + \sin^2 \phi_2}_1) + 2A_1 A_2 \underbrace{(\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2)}_{\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

on arrive finalement à:

$$A_{tot}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi) \quad \text{avec } \Delta\varphi = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$$

$$\Delta\varphi = E_2M \frac{2\pi}{\lambda} + \varphi_0 - \left(E_1M \frac{2\pi}{\lambda} + \varphi_0 \right)$$

déphasage des 2 signaux en M

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (E_2M - E_1M)$$

appelé différence de marche (différence des distances entre les sources et le point d'interférence)

c) Conditions d'interférences constructives et destructives

• Interférences constructives $\Rightarrow A_{tot}$ maximale :

$$\Rightarrow A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi) \text{ max}$$

$$\text{Or } -1 \leq \cos(\Delta\varphi) \leq 1 \text{ donc au max } \cos(\Delta\varphi) = 1$$

$$\text{Constructives } \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \times p \quad p \in \mathbb{Z} \quad \leftarrow \text{entier de déphasage}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} (E_2M - E_1M) = 2\pi \times p \Rightarrow E_2M - E_1M = p\lambda, p \in \mathbb{Z}$$

• Interférences destructives $\Rightarrow A_{tot}$ minimale

$$\text{Rmq } A_{tot \text{ max}} = (A_1 + A_2)^2$$

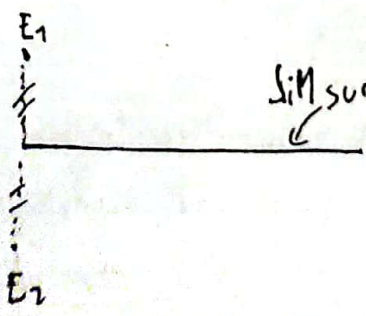
entier de différence de marche

$$\Rightarrow \cos(\Delta\varphi) = -1$$

$$\text{destructives } \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi p + \pi, p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{destructives } \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} (E_2M - E_1M) = 2\pi p + \pi \Rightarrow E_2M - E_1M = p\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{Rmq } A_{tot \text{ min}} = (A_1 - A_2)^2$$

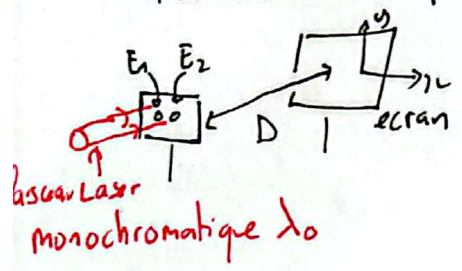


Si M sur cette ligne $E_2M = E_1M \Rightarrow E_2M - E_1M = 0 = p\lambda$ avec $p=0$

les interférences sont constructives sur cette droite

III.3) Interférences lumineuses: Trous d'Young

a) Illustration expé (anim et TP)



on mesure l'intensité lumineuse

sur l'écran $I_{tot}(M)$ proportionnelle à l'amplitude au carré du signal lumineux reçu

les 2 sources sont les mêmes (même fréquence et même amplitude)

$$S_1(M,t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_1(M))$$

$$S_2(M,t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_2(M))$$

b) Formule de Fresnel

la formule de Fresnel pour 2 sources identiques donne l'intensité lumineuse mesurée en un point M de l'écran

$$I_{tot}(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) \right)$$

avec δ la différence de chemin optique

$$\delta = n (E_2M - E_1M)$$

indice optique du milieu de propagation (si air $n=1$)

longueur d'onde dans le vide

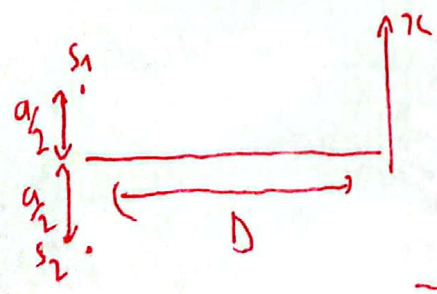
condition d'interférences constructives

$$\delta = p \lambda_0 \quad (\text{avec } p \in \mathbb{Z})$$

condition d'interférences destructives:

$$\delta = p \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

exemple: Ex 4 TD 14



$$\delta = \frac{ax}{D}$$

$$I_{tot}(x) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) \right)$$

