Programme de colles n° 16

Semaine du 27/01/2025 au 31/01/2025

☞ ***Matrices, bornes, limite d'une suite*** ☜

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 12. Matrices —

Révisions du programme précédent.

— Chapitre 13. Bornes —

— Chapitre 14. Limite d'une suite numérique —

Le début.

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 13. $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ pour $\lambda > 0$ et A non vide majorée.
- Chapitre 14. Unicité de la limite en cas d'existence.
- Chapitre 14. Théorème des suites recouvrantes : si $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. (On traitera le cas $\ell \in \mathbb{R}$).

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**
  Exemples : montrer que $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π-périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**
  Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**
  Exemples : résoudre $x\,|x| \leqslant 3x+2$, montrer que $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \longmapsto \dfrac{\cos x + 2}{x^2+4}$ sur $[\,0\,;1\,]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n-ièmes).
  Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$, les racines carrées de $3-4\mathrm{i}$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  Exemples : donner la formule pour $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$, écrire $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  Exemples : définir Arctan, simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \longmapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$, de $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$, de $x \longmapsto \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**
  Exemples : $\displaystyle\int^{x} \cos t\, \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \sin x$.

- **Équations différentielles.**
  Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Matrices.**
  Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.