

Problème 1

Q1) La fréquence du signal correspond à l'abscisse du premier pic. sur le spectre de la figure 4 : $f \approx 0,545 \text{ kHz} = \boxed{545 \text{ Hz}}$

Q2) $f_1 = 545 \text{ Hz}$ $f_2 \approx 1090 \text{ Hz}$ $f_3 = 1645 \text{ Hz}$

$$\boxed{f_n = n \times f_1}$$

Q3) système : {masse mobile m}
 référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces extérieures :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- force de rappel $\vec{F} = -K(l - l_0)\vec{e}_r$
 $\vec{F} = -Kx\vec{e}_i$
 $l = x(t) \text{ et } l_0 = 0 \text{ (enoncé)}$
- frottement $\vec{f} = -d\vec{v}$
- réaction du support \vec{R}_W

Principe fondamental de la dynamique appliqué au système :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{R}_W \quad \text{projection sur } Ox : m\ddot{x} = -d\dot{x} - Kx$$

($\vec{P} \cdot \vec{e}_i = 0$ et $\vec{R}_W \cdot \vec{e}_i = 0$)

On a donc $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0$ Par identification

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{d}{m} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{d} \sqrt{mK}}$$

Q4) Q est le facteur de qualité sans unité

Plus Q est grand plus le comportement du système se rapproche d'un oscillateur HARMONIQUE

ω_0 est la pulsation propre en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
 c'est la pulsation

Q5) On voit que le régime est pseudo périodique
 On en déduit $Q > \frac{1}{2}$. Comme il y a beaucoup
 d'oscillations $Q \gg \frac{1}{2}$

Q6) équation caractéristique: $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

ici $Q > \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0$

racines

$$r_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{on pose } \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

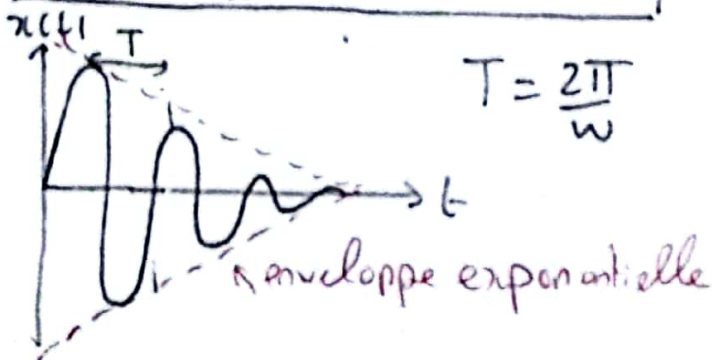
$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} B \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} B \sin(\omega t) + B \omega e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(0) = V_0 \Rightarrow B \omega = V_0 \Rightarrow B = \frac{V_0}{\omega}$$

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin(\omega t)$$



Q7) \underline{X}_0 est l'amplitude complexe du signal $x(t)$

$|\underline{X}_0| = X$ l'amplitude réelle

$\arg(\underline{X}_0) = \phi$ la phase à l'origine

Q8)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Passage dans \mathbb{C} $\Rightarrow \underline{x}(\gamma\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \gamma\omega + \omega_0^2 \underline{x}) = A_0 e^{j(\omega t + \phi)}$

$$\Rightarrow \underline{x} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right) = A_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\Rightarrow \underline{X}_0 e^{j\omega t} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right) = A_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\underline{X}_0 = \frac{A_0 e^{j\phi}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right)}$$

$$|\underline{X}_0| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

Q9) quand $\omega \rightarrow 0$ $|\underline{X}_0| \approx \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2)^2}} = \frac{A_0}{\omega_0^2} \neq 0$

on peut éliminer les graphes 1 et 3

quand $\omega \rightarrow +\infty$ $|\underline{X}_0| \rightarrow 0$ on élimine le graphe 4
le bon graphe est le 2

Q10) Il y a résonance si $|X_0|$ passe par un maximum
 C'est le cas si $D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2$ est minimale

On pose $y = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow D(y) = \omega_0^4 (1-y)^2 + \omega_0^4 \frac{y}{Q^2}$

À la résonance $\frac{dD}{dy}(y=y_R) = 0 \Leftrightarrow \omega_0^4 \times \left[2(1-y_R) + \frac{1}{Q^2}\right] = 0$

$(\Rightarrow) 2(1-y_R) + \frac{1}{Q^2} = 0$

$y_R = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

finalment $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ existe seulement

si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

donc $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Q11) $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Q12) $Q \gg \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \omega_R \approx \omega_0$

Q13) $X_R = |X_0(\omega = \omega_R)| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^4}{Q^2}}} = \frac{A_0 Q}{\omega_0^2}$

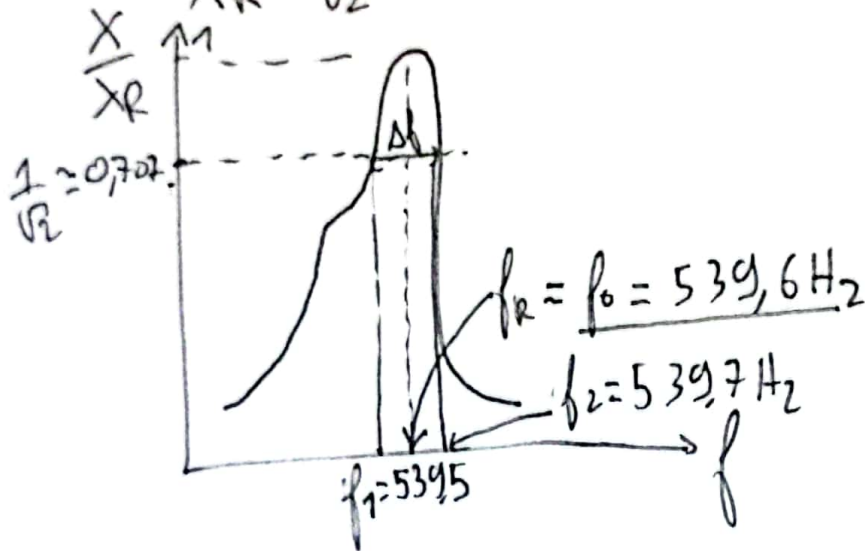
Q14) Ce sont les pulsations ^{limites} telles que

$|X_0(\omega_1, \omega_2)| = \frac{X_R}{\sqrt{2}}$

amplitude maximale

$$Q15) \Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$Q16) \frac{X}{X_R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ quand } \omega = \omega_1 \text{ ou } \omega = \omega_2 \quad \frac{X}{X_R} \approx 0,707$$



$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 0,2 \text{ Hz}$$

$$Q = \frac{539,6}{0,2} = 2698$$

$$\text{À la résonance } X_R = \frac{f_0 Q}{\omega_0^2} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \times 2698}{(2\pi \times 539)^2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

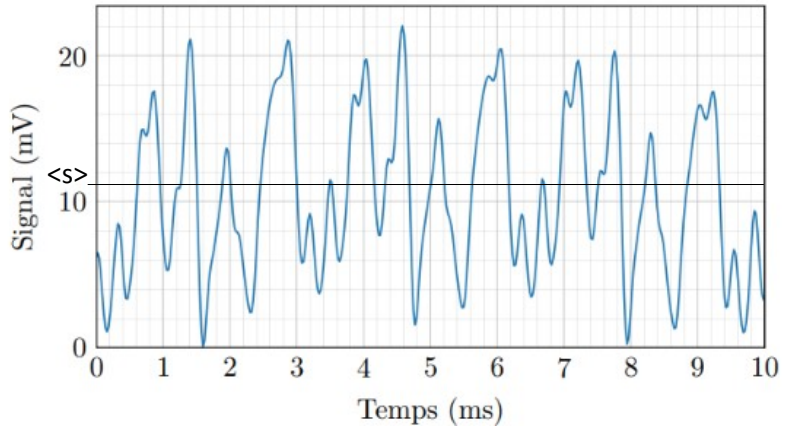
C'est très faible, Il semble impossible de détruire le verre de cette façon...

Problème 2: Filtrage d'un signal musical

Q1 $\langle s(t) \rangle \approx 11 \text{ mV}$ (entre 10 et 12 mV)

Q2 $2T = 7,9 - 1,6 \text{ ms} = 6,3 \text{ ms} \rightarrow T = 3,15 \text{ ms}$

$\rightarrow f = 1/T = 317 \text{ Hz}$ (ok entre 310 et 330 Hz)



Q3 Le signal est clairement **non sinusoïdal**, l'analyse spectrale fera donc apparaître des harmoniques.

Q4 $H_1(j\omega) = \frac{u_1}{u_e}$ en utilisant la formule du

pont diviseur de tension (dipôles en série) : $u_1 = \frac{R_1}{\frac{1}{jC\omega} + R_1} u_e$

donc $H_1(j\omega) = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jC_1R_1\omega}$

Q5 une analyse des schéma à haute et basse fréquence montre :

- à haute fréquence le condensateur se comporte comme un fil donc $u_1 = u_e$

- à basse fréquence le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i=0$ et comme

$u_1 = R_1 i \rightarrow u_1 = 0$

ainsi le filtre n'atténue pas les signaux de haute fréquence **c'est un passe haut**

Q6 On pose $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$

$$|H(\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

en HF $\omega \gg \omega_1$ et $|H(\omega)| \approx 1$ donc $G_{dB}(\omega) = 20 \log(|H(\omega)|) = 0$

La courbe de gain en HF est asymptote à une droite d'équation $G_{dB} = 0$

en BF $\omega \ll \omega_1$ et $|H(\omega)| \approx \frac{\omega}{\omega_1}$

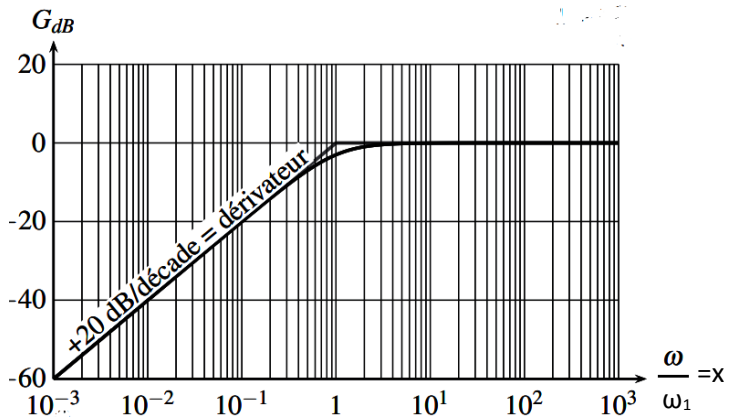
$$G_{dB}(x) = 20 \log(|H(x)|) = 20 \log(x)$$

$G_{dB}(10x) = 20 + G_{dB}(x)$: La pente de la courbe de Gain est donc de 20 dB/décade à basse fréquence

Q7 Par définition de la pulsation de coupure à -3dB $|H(\omega_1)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ c'est le cas quand

$$\omega = \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \text{ comme } \omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \text{ A.N } f_1 = 15,9 \text{ Hz} \text{ et } \omega_1 = 100 \text{ rad/s}$$

ce filtre atténue les composantes spectrales de $u_e(t)$ de fréquence $f \ll f_1$



Q8

$$s(t) = |H(0)|E_0 + |H(\omega = 2000)|E_1 \cos(\omega t + \arg(H(2000))) + |H(10\omega)|E_{10} \cos(10ft + \arg(H(10\omega)))$$

$$(|H|(0)) = 0 \quad (|H|(2000)) = \frac{\frac{\omega}{\omega_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} = \frac{\frac{2000}{100}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2000}{100}\right)^2}} = 0,99$$

$$(|H|(20000)) = \frac{\frac{\omega}{\omega_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} = \frac{\frac{20000}{100}}{\sqrt{1 + \left(\frac{20000}{100}\right)^2}} \approx 1 \quad \text{on en déduit } s_0 = 0 \quad s_1 \approx E_1 = 6\text{mV} \quad \text{et } s_{10} \approx E_{10}$$

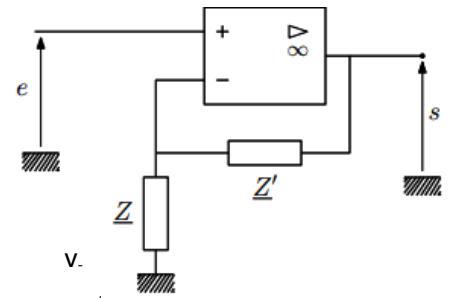
Q9 Comme la fréquence fondamentale du signal est de 330 Hz environ soit $\omega = 2000 \text{ rad/s} \gg \omega_1$, ce filtre permet de supprimer seulement la composante continue du signal d'entrée (en effet $s_0 = 0$)

Q10. L'ALI est idéal donc $i_+ = i_- = 0 \rightarrow Z$ et Z' sont en série

d'après la formule du pont diviseur de tension $\underline{v_-} = \frac{Z}{Z + Z'} \underline{s}$

l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire car il y a une contre réaction sur la borne inverseuse $\rightarrow v_+ = v_-$ (car de plus l'ALI est idéal)

$$\text{ici } \underline{v_-} = \underline{e} \quad \text{on a donc } \underline{e} = \frac{Z}{Z + Z'} \underline{s} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = 1 + \frac{Z'}{Z}$$



Q11. $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = 1 + \frac{R'}{R}$ l'amplitude de la sortie est alors égale à $(1 + R'/R)$ fois l'amplitude de l'entrée

ce montage amplifie seulement le signal d'entrée sans ajouter de déphasage ni filtrer.

$$\text{Q12 } \underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega} \quad (\text{dipôles en parallèle})$$

$$\text{Q13. On est dans le cas où } \underline{Z} = R_3 \quad \text{et } \underline{Z}' = \underline{Z}_{eq} \quad \text{ainsi } \underline{H}_2 = 1 + \frac{\underline{Z}_{eq}}{R_3} = 1 + \frac{1}{\frac{R_3}{R_2} + jR_3C_2\omega} \Rightarrow \underline{H}_2 = 1 + \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + jR_2C_2\omega}$$

$$\text{Par identification } G_0 = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{et } \omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$$

Q14

$$\text{en BF } \underline{H}_2 \approx 1 + \frac{G_0}{1} \Rightarrow |\underline{H}_2| = 1 + G_0 \quad \text{en H.F } \underline{H}_2 \approx 1 \Rightarrow |\underline{H}_2| = 1$$

Q15

$$f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 497 \text{ Hz} \quad \text{et } G_0 = \frac{R_2}{R_3} = 8,8 \times 10^{-2} \approx 11,3$$

Les composantes spectrales de fréquence $f \gg f_2$ sont **amplifiées d'un facteur $1 + G_0$** (donc légèrement amplifiées)

Les composantes spectrales de fréquence $f \ll f_2$ ne sont **ni amplifiées ni atténuées** (car le gain du filtre est de 1 à basse fréquence)