Semestre A - Partie 2 : Mécanique3

CHAP. 15 : APPROCHE ÉNERGETIQUE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

Objectifs :

- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force. Savoir que la puissance dépend du référentiel.
- Connaître et utiliser les lois de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.
- Distinguer force conservative et force non conservative.
- Etablir et connaître les expressions des énergies potentielles de pesanteur, gravitationnelle, élastique, et électrostatique.
- Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
- Identifier sur un n graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.
- Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, leur nature stable et instable.
- Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable : identifier cette situation au modèle de l'oscillateur harmonique. Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.
- Evaluer l'énergie minimale nécessaire pour franchir une barrière de potentiel.
- Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.

Rapport de jury

Mécanique En mécanique, les schémas doivent être soignés afin de faciliter la projection des forces sur les vecteurs unitaires de la base choisie. Il faut impérativement commencer par définir le système et le référentiel d'étude. Les formules des vitesses et accélérations en coordonnées cylindriques doivent être connues (ou retrouvées très rapidement). Les théorèmes énergétiques sont plutôt bien maitrisés mais souvent sous-employés par rapport aux autres théorèmes de la mécanique classique. Avant de se lancer dans un principe fondamental de la dynamique, il faut s'approprier un minimum du sujet afin de voir si un théorème de l'énergie mécanique ne serait pas plus appropriée. Les planches portant sur la mécanique céleste ont été très mal traitées, par manque de connaissances sur le sujet. Les candidats doivent savoir faire le lien entre énergie mécanique et nature de la trajectoire dans les exercices à forces centrales. Il faut connaitre ou savoir retrouver très rapidement les relations de vitesses cosmiques, d'énergie mécanique sur une ellipse et la troisième loi de Kepler. Le théorème du moment cinétique est trop peu utilisé. Il faut connaitre la conséquence de la conservation du moment cinétique pour un problème à forces centrales. Tout comme en thermodynamique, les résultats dans ce thème présentent un fort écart-type. Il est dommage de ressentir tant de faiblesses sur ce domaine qui est essentiel dans son utilisation de nombreux thèmes en physique.

I Energie cinétique

1.1 Puissance d'une force

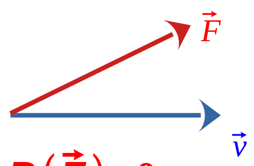
on définit la puissance d'une force appliquée à un point M qui est animé d'une vitesse vec v dans le référentiel R de la façon suivante :

$$\boxed{P(\vec{F})=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

Rmq : $\vec{v}$ dépend du référentiel R donc $P(\vec{F})$ aussi !

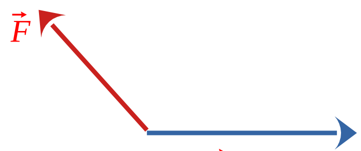
Dimension : [P]= M LT^{-2} (L T^{-1}) = **M L^2 T^{-3}** = ML^{2}T^{-2} T^{-1} = **[énergie] /T** donc l'unité est **Watts**

additivité : $P(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=P(\vec{F}_1)+P(\vec{F}_2)$



$P(\vec{F})>0$

Puissance **motrice**

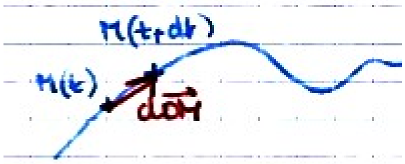


$P(\vec{F})<0$

Puissance **résistante**

Puissance nulle

1.2 Travail d'une force



a Au cours d'un déplacement élémentaire

Rappel : déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ d'un point M (parfois noté $\vec{dl}$)

pendant dt le système le système se déplace de M(t) à M(t+dt)

$$d\vec{OM}=\overrightarrow{OM(t+dt)}-\vec{OM}(t)=\overrightarrow{M(t+dt)M(t)}$$ si dt est suffisamment petit : $d\vec{OM}=\vec{v}\,dt$

Travail élémentaire :

Pendant un intervalle de temps dt (donc au cours d'un déplacement élementaire $d\vec{OM}$), on définit le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ de puissance P($\vec{F}$) comme :

$$\boxed{\delta W(\vec{F})=P(\vec{F})dt}$$

Or, comme $P(\vec{F})=\vec{F}\cdot\vec{v}$ ona $\delta W(\vec{F})=\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt=\vec{F}\cdot d\vec{OM}$

d'où $\boxed{\delta W(\vec{F})=\vec{F}\cdot d\vec{OM}}$ (aussi écrit $\delta W(\vec{F})=\vec{F}\cdot\vec{dl}$)

Rmq :
- Le travail élémentaire dépend du référentiel d'étude
- $[\delta W(\vec{F})]=M\,L\,T^{-2}=[energie]$
- δW($\vec{F}$) caractérise un **échange d'énergie** avec l'extérieur par l'intermédiaire de la force
  comme c'est un échange → **on n'écrit pas** dW
  (ce n'est pas une variation de la grandeur W mais un échange d'une petite quantité)
- δW **dépend (en général, à priori) du chemin suivi**

b Au cours d'un déplacement fini entre deux points quelconques A_1 et A_n

Le travail $W_{AB}(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ est obtenue en sommant les travaux élémentaires sur les positions successives

$$W_{AB}(\vec{F})=\sum_{i=1}^{n}\delta W_i=\vec{F}(A_1)\cdot\overrightarrow{A_1A_2}+\vec{F}(A_2)\cdot\overrightarrow{A_2A_3}.....\vec{F}(A_{n-1})\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$ **(A_1 =A et A_N = B)**

en considérant les $\vec{dl}_i=\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ comme élémentaire, **la somme devient infiniment proche de l'intégrale** :
et on note

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F})=\int_{AB}\vec{F}(M)\cdot\vec{dl} \quad \text{on a alors} \quad W_{AB}(\vec{F})=\int_{t_1}^{t_2}P(\vec{F}(M))\,dt}$$

Cette formule permet d'étudier le cas d'une force de norme variable au cours du déplacement !

Par exemple force gravitationnelle : (Quelle énergie cinétique doit-on fournir à un vaisseau spatial pour qu'il se libère de l'attraction gravitationnelle ?)

c Travail d'une force constante sur un déplacement courbe

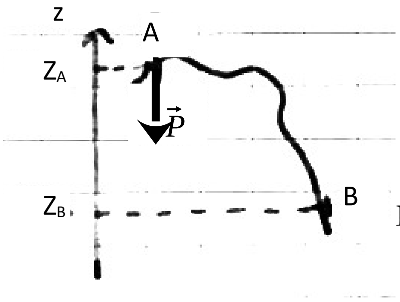
$$W_{AB}(\vec{F})=\int_{AB}\vec{F}(M)\cdot\vec{dl}=\vec{F}(M)\cdot\int_{AB}\vec{dl}=\vec{F}(M)\cdot\vec{AB}$$ avec $\vec{F}$ constante sur $\vec{AB}$

(même si le déplacement de A vers B n'est pas en ligne droite !)

$\int_A^B\vec{dl}=\vec{AB}$ Démo : utiliser la relation de Chasles sur lesvecteurs élémentaires bout à bout

Rmq : force constante veut dire constante en norme et en direction

d Exemple : travail du poids



$\delta W(\vec{P}) = \vec{P}\cdot d\vec{OM} = -mg\,\vec{e}_z\cdot d\vec{OM}$ or $d\vec{OM} = dx\,\vec{e}x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$ doc

$\delta W(\vec{P}) = -mg\,dz$

$$\boxed{W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)}$$

Rmq : si $z_A > z_B$ $W_{AB} > 0 \rightarrow$ travail moteur
si $z_A < z_B$ $W_{AB} < 0 \rightarrow$ travail résistant

$W_{AB}(\vec{P})$ **ne dépend pas du chemin suivi**

Si axe vers le bas alors $\vec{P} = +\,mg\,\vec{e}_z$ donc $\delta W = mg\,\vec{e}_z\cdot d\vec{OM} = +mg\,dz$

donc $W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_B - z_A)$

1.3 Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen, la puissance de la résultant des forces **extérieures et intérieures (donc toutes les forces)** s'exerçant sur un système assimilé à un M est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce point :

$$\boxed{P(\sum \vec{F}) = \sum P(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt}}$$

Démo : PFD + produit scalaire avec $\vec{v}$ or $\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2)$

1.4 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

« Soit un point M qui se déplace dans R_g sous l'effet de la résultante des forces $\vec{F}_{res}$ pendant la durée $t_2 - t_1$ d'un point A à un point B

Alors la variation d'énergie cinétique de M entre t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces s'exerçant sur M :

$$\boxed{\Delta E_{c\,A\rightarrow B} = \sum W_{AB}(\vec{F})}$$

II Énergie(s) potentielle(s)

2.1 Forces conservatives

Déf ; On dit qu'une force conservative si le travail de cette ne **dépend pas du chemin suivi.** Dans ce cas son travail élémentaire s'identifie (au signe près) à une variation infinitésimale d'une fonction scalaire appelée énergie potentielle notée E_p

$$\boxed{\delta W(\vec{F}_{cons}) \overset{\text{déf}}{=} -dE_p}$$

Cette égalité constitue la définition de l'énergie potentielle associée à la force conservative

entre deux points A et B on a alors :

$$W_{A\rightarrow B}(\vec{F}_{cons}) = -\Delta E_{p\,A\rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$$

Énergie potentiel au point de départ A moins l'énergie potentiel au point d'arrivée B

2.2 Énergie potentielle de quelques forces conservatives

a Énergie potentielle de pesanteur (E_{pp})

Poids : $\vec{P}=-m\,g\,\vec{e}_z$ axe $\vec{e}_z$ vers le haut

alors $\delta W(\vec{P})=-\vec{P}\cdot d\vec{OM}=-mg\,\vec{e}_z\cdot dz\,\vec{e}_z=-mg\,dz$

$$\delta W(\vec{P})\overset{\text{def}}{=}-dE_{pp}\Leftrightarrow -dE_{pp}=-m\,g\,dz\Leftrightarrow\frac{dE_{pp}}{dz}=+mg$$

on primitive $E_{pp}(z)=mgz+cste$

avec $\vec{e}_z$ vers le bas : $\vec{P}=+m\,g\,\vec{e}_z$

$$\delta W(\vec{P})=+mg\,dz$$

$$\frac{dE_{pp}}{dz}=-mg$$

$$E_{pp}(z)=-mgz+cste$$

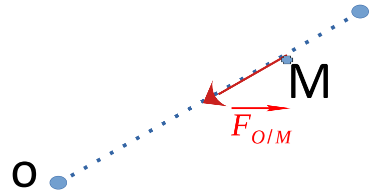
E_{pp}=mgz+cste si $\vec{e}_z$ vers le haut **E_{pp}=-mgz+cste si $\vec{e}_z$ vers le bas**

E_{pp} augmente si z augmente : logique **E_{pp} augmente si z diminue : logique**

b Energie potentielle gravitationnelle (E_{pg})

La force exercée par un astre ponctuel O de masse m_0 sur un point M de masse m_M situé à une distance r de O :

$$\boxed{\vec{F}_{O/M}=-G\frac{m_0 m_M}{r^2}\vec{e}_r}$$



$$\vec{e}_r=\frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}=\frac{\vec{r}}{r}$$

en coordonnées sphériques : $d\vec{OM}=dr\,\vec{e}_r+r\,d\theta\,\vec{e}_\theta+r\sin(\theta)\,d\phi\,\vec{e}_\phi$

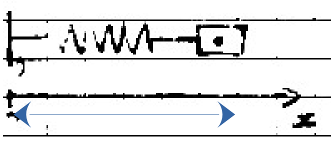
$\delta W(\vec{F}_{O/M})=-G\frac{m_O m_M}{r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{OM}\overset{\text{def}}{=}-dE_{pg}$ dE_{pg} est une petite variation d'énergie potentielle gravitationnelle

ici : $\delta W(\vec{F}_{O/M})=-G\frac{m_O m_M}{r^2}dr$ donc $-dE_p=-G\frac{m_O m_M}{r^2}dr\Rightarrow\frac{dE_p}{dr}=G\frac{m_O m_M}{r^2}$ en primitivant par rapport à r : $E_{pg}(r)=-G\frac{m_O m_M}{r}+cste$ en général on suppose que E_{pg} tend vers 0 quand r tend vers l'infini

donc on prendre cste = 0 et finalement : $\boxed{\boldsymbol{E_{pg}(r)=-G\frac{m_O m_M}{r}}}$

c Énergie potentielle élastique

Force de rappel élastique : $\vec{F}_l=k(l-l_0)\vec{e}_x$ avec un bon choix d'axe : $\vec{F}_l=k\,x\,\vec{e}_x$



alors $\delta W(\vec{F}_l)=-\vec{F}_l\cdot d\vec{OM}=-k\,x\,\vec{e}_x\cdot dx\,\vec{e}_x=-k\,xdx$

Par définition d'une force conservatives

$$\delta W(\vec{F})\overset{\text{def}}{=}-dE_{pel}\Leftrightarrow dE_{pel}=k\,x\,dx\Rightarrow\frac{dE_{pel}}{dx}=k\,x$$

$$\delta W(\vec{F}_l)\overset{\text{def}}{=}-dE_{pel}\Leftrightarrow -dE_{pel}=-k\,x\,dx\Leftrightarrow\frac{dE_{pel}}{dx}=-kx$$

l_0

En primitivant par rapport à x : $\boxed{\boldsymbol{E_{pel}=\frac{1}{2}k\,x^2+cste}}$ et de manière plus générale : $\boldsymbol{E_{pel}=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2+cste}$

d Énergie potentielle électrostatique (HP?)

La force exercée par un charge q_A ponctuel en A sur un charge q_B en B situé à une distance r =AB est :

$\vec{F}_{A/B}=\frac{-q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ donc par analogie avec la force gravitationnel $\boldsymbol{E_{pg}(r)=\frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$

2.3 Lien entre énergie potentielle et position d'équilibre

a) Expression de la force conservative en fonction de l'énergie potentielle

On considère un système (1D). Soit M une masse m soumise seulement à la force conservative $\vec{F}(M) = F(x)\vec{e}_x$ F(x) étant algébrique (positif ou négatif)

$\delta W(\vec{F}) = -\vec{F}\cdot d\vec{OM} = F(x)dx$ or par définition d'une force conservative :

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p \Leftrightarrow F(x)dx = -dE_p \Rightarrow F(x) = \frac{-dE_p}{dx}$$

soit $\vec{F}(x) = \frac{-dE_p}{dx}\vec{e}_x$

Interprétation importante : la force conservative est dirigé dans le sens de diminution de l'énergie potentielle associée

b) Extension à plusieurs dimension

à 3D, E_p (M) est une fonction de plusieurs variables (x,y,z) en coordonnées cartésiennes $E_p(M) = E_p(x,y,z)$

en coordonnées cartésienne la force en M a pour expression $\vec{F}(x,y,z) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z$

Rmq (voc) : $\frac{\partial E_p}{\partial x}$ est appelée **dérivée partielle de E_p par rapport à la variable x**

les autres variables (y et z) étant considérées comme constantes

De même, $\frac{\partial E_p}{\partial y}$ est appelée **dérivée partielle de E_p par rapport à la variable y**

les autres variables (x et z) étant considérées comme constantes

Rmq (notation) : La dérivée partielle s'écrit avec des « d arrondis » et pas avec un d droit

application soit la fonction $f(x,y,z) = 5x^2y + y^2 + z$ Donner les dérivées partielles de cette fonction

Réponse $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} = 10xy$ $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z} = 5x^2 + 2y$ $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y} = 1$

c) Notion de gradient

à 3 Dimensions, On dit que la force conservative en M (x,y,z) est égale à l'opposé du gradient de l'énergie potentielle à ce point

$\vec{F} = -\vec{grad}(E_p)$ **aussi noté** $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$

le gradient de E_p en coordonnées cartésiennes s'écrit $\vec{\nabla}E_p = \vec{grad}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z$

Interprétation physique : le vecteur gradient de E_p en un point (noté $\vec{grad}(E_p)$)indique à la fois la *direction* de la variation la plus forte de E_p en ce point et l'*intensité* de cette variation.

$\vec{grad}(E_p)$ **est orienté vers la direction d'augmentation de E_p**

Rmq :Lorsque la fonction ne dépend seulement d'une seule variable, le gradient se confond avec la dérivée usuelle et on retrouve le cas 1D

d) Lien avec l'équilibre :

Rappel : **Un système est à l'équilibre si il n'est soumis à aucune force ou à des forces qui se compensent (autrement dit, si on place un objet d'ans une position d'équilibre, il va y rester)**

Comme ici $\vec{F}(x)$ est la seule force présente, dans la position x= x_{eq} d'équilibre,

on a aura $\vec{F}(x_{eq})=\vec{0} \Rightarrow \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}}=0$

A retenir : les positions d'équilibre correspondent aux extrema de la fonction E_p

cas général à 3 D : $-\vec{\nabla}E_p=\vec{0}$ soit $-\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x-\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y-\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z=\vec{0}$

les composantes doivent être toutes nulles donc $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}}=\left(\frac{dE_p}{dy}\right)_{y=y_{eq}}=\left(\frac{dE_p}{dz}\right)_{z=z_{eq}}=0$

e) Stabilité (d'une position d'équilibre)

cadre d'étude :

On suppose qu'initialement M=M_{eq}. (à 1D x = x_{eq}) c-à-d le système est dans une position d'équilibre

On envisage un déplacement élémentaire $\vec{dl}=\overrightarrow{M_{eq}M'}$ (à 1 D $\vec{dl}=dx\,\vec{e}_x$)

Après le déplacement le système est en M' (à 1 D x=x')

On analyse l'évolution du système après ce déplacement

Définition physique de la stabilité :

Si après un déplacement élémentaire $\vec{dl}=\overrightarrow{M_{eq}M'}$ depuis une position d'équilibre le système tend à revenir vers la position d'équilibre M_{eq} , alors la position d'équilibre est qualifiée de stable,

dans le cas contraire elle est qualifiée d'instable.

Exemple stabilité des nœuds

https://www.youtube.com/watch?v=XpNbyfxxkWE

f) Lien avec l'énergie potentielle :

- Cas 1 : Supposons que $E_p(x') > E_p(x_{eq})$.

Comme la force conservative associée à l'énergie potentielle étudiée est dirigée dans le sens de diminution de E_p : **dans ce cas $\vec{F}$ est dirigée de x' vers x_{eq}** (car $E_p(x') > E_p(x_{eq})$)

$\vec{F}$ tend donc à **amener le système vers la position d'équilibre :**

On en déduit que la position d'équilibre est stable dans ce cas

- cas 2 :Supposons que $E_p(x') < E_p(x_{eq})$.

La force conservative est toujours dirigé dans le sens de diminution de E_p : ;**dans ce cas $\vec{F}$ est dirigée de x' vers x_{eq}** (car $E_p(x') < E_p(x_{eq})$)

$\vec{F}$ tend donc à **éloigner encore plus le système de la position d'équilibre :**

la position d'équilibre est <u>instable</u>

Rmq : on sait que par déf que $E_p(x_{eq})$ est soit un max soit un min de l'E_p. Si après un déplacement élémentaire quelconque depuis l'équilibre E_p augmente, alors forcement la position d'équilibre était un minimum, c'est le cas 1

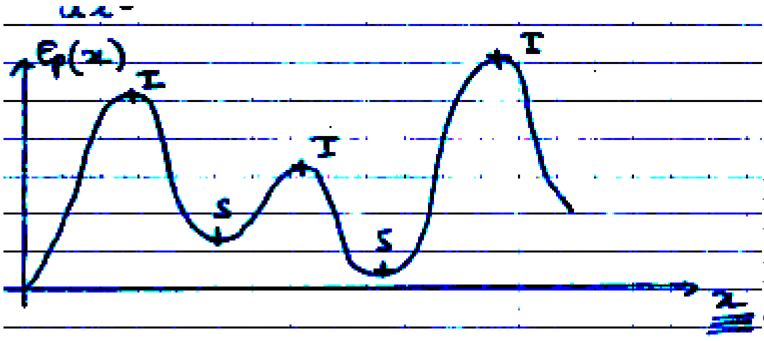
à l'inverse si depuis la position d'équilibre, après déplacement élémentaire E_p diminue, la position d'équlibre était forcement un max

Conclusion :

Un minimum de la fonction énergie potentielle correspond à une position d'équilibre stable

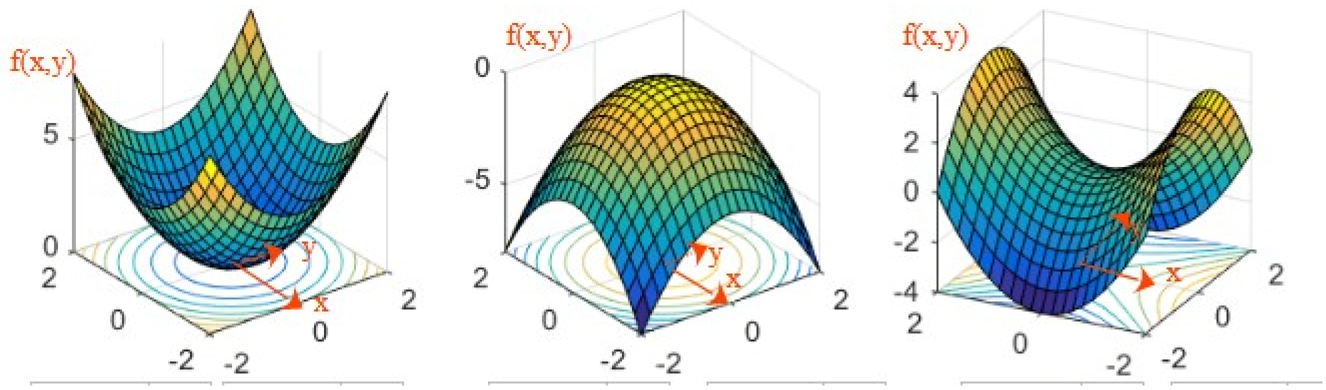
(mathématiquement $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} > 0$) (penser à la parabole ax^2 qui à cette forme $\bigvee$ si a >0)

à l'inverse un max de $E_p(x)$ correspond à une position d'équilibre instable



(I pour instable , S pour stable)

Moyen mnémotechnique : on pose une bille sur la courbe : si on la laisse évoluer depuis S en la déplaçant un peu elle revient



à plusieurs dimension, toutes les dérivées partielles doivent être positiive en même temps pour avoir une position d'équilibre

g) Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Cadre d'étude :

On étudie le mouvement à 1 D d'un système de masse M soumis seulement à une force conservative $\vec{F}$.
On suppose qu'on connaît la fonction E_p (x) (par exemple à l'aide d'un graphique).

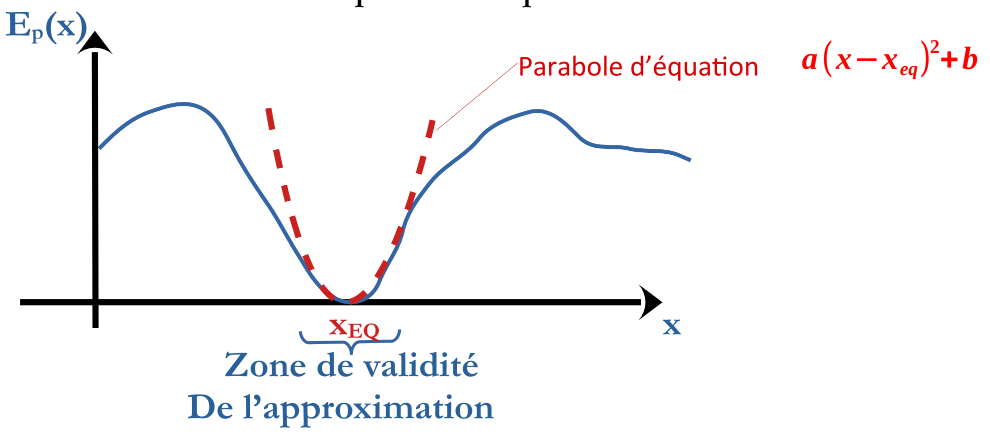
Objectif : On cherche à établir (et résoudre) l'**équation du mouvement du système dans une zone de l'espace proche d'une position d'équilibre**
c'est à dire qu'on cherche x(t) pour des x tel que $|x - x_{eq}| << \delta$ avec δ petit devant l'échelle du système

Modélisation :

Si la courbe représentative d'E_p **(x) n'est pas trop « biscornu »**
on peut localement (autour de x_{eq}) approximer $E_p(x)$ par une portion de parabole :

$$E_p(x) \approx a(x-x_{eq})^2 + b$$

(on sait que l'équation sera de cette forme car la fonction E_p doit s'annuler en x_{eq} car x_{eq} est une position d'équilibre



Pour trouver a et b on utilise la formule de Taylor Young

Rappel : Soit une fonction f dérivable n fois au point x_0, alors f admet un Dl_n en x_0 :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x0)^n+o((x-x_0)^n)$$

(notation de physicien $f''(x_0)=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0}$)

Alors dans ce cas au voisinage de $E_p(x)$: $E_p(x)\approx E_p(x_{eq})+\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}}(x-x_{eq})+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}(x-x_{eq})^2$

Comme x_{eq} est une position d'équilibre, par définition : $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}}=0$

donc $E_p(x)=E_p(x_{eq})+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}(x-x_{eq})^2$ par ID $a=\frac{+1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$ $b=E_p(x=x_{eq})$

Rmq 1 : Si l'équilibre est stable $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}>0$ donc a>0 logique

Rmq 2 : on peut voir une analogie avec une énergie potentiel élastique $E_{pel}(x)=\frac{1}{2}k(x-x_{eq})^2+E_{pel}(x_{eq})$

avec $k=\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$

h) Équation différentielle du mouvement vérifiée par x(t) au voisinage de x_{eq}

BDF : $\vec{F}(x)=\frac{-dE_p}{dx}\vec{e}_x$

Ref : Galiléen
système : {masse m}

PFD en projection sur (Ox) : $m\ddot{x}(t)=\frac{-dE_p}{dx} \Leftrightarrow m\ddot{x}(t)=-k(x(t)-x_{eq})$

En posant X= x- x_{eq} on obtient $m\ddot{X}(t)+kX(t)=0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{X}(t)+\frac{k}{m}X(t)=0}$

c'est l'équation d'un oscillateur harmonique. !

de pulsation propre $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ avec $k=\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$

(on a k >0 car $k=\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$ >0 car l'équilibre est stable)

Ainsi, dans cette situation le système va osciller autour de la position d'équilibre

N'importe quel système aussi complexe qu'il soit possédant une position d'équilibre stable peut dans une certaine mesure être modélisée par un oscillateur harmonique

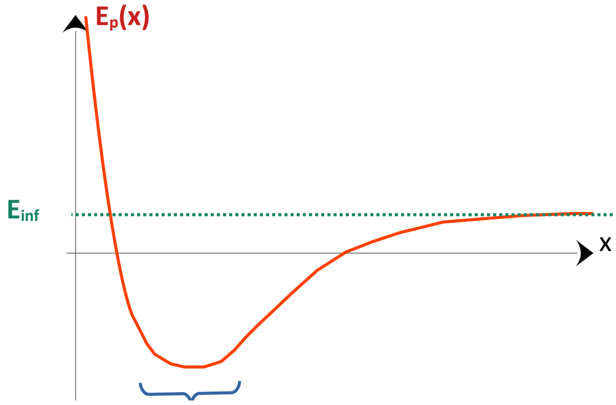
Voc :la courbe $E_p(x)$ au voisinage de x_{eq} **est appelé puits de potentiel harmonique**

Exemple : Oscillations des atomes dans une molécule

2.4 Graphe d'énergie potentielle et étude qualitative d'un mouvement

Objectif : déterminer le mouvement possible d'un système à partir de la courbe $E_p(x)$

a) Exemple



Puits de potentiel harmonique

b) Lien avec l'énergie mécanique

Comme $E_m = E_p + E_c$ avec $E_c = 1/2\, m\, v^2$ donc $E_c \geq 0$ donc $E_c + E_p \geq E_p$

on a toujours $E_m(x) \geq E_p(x)$ pour toute position x accessible au système étudié

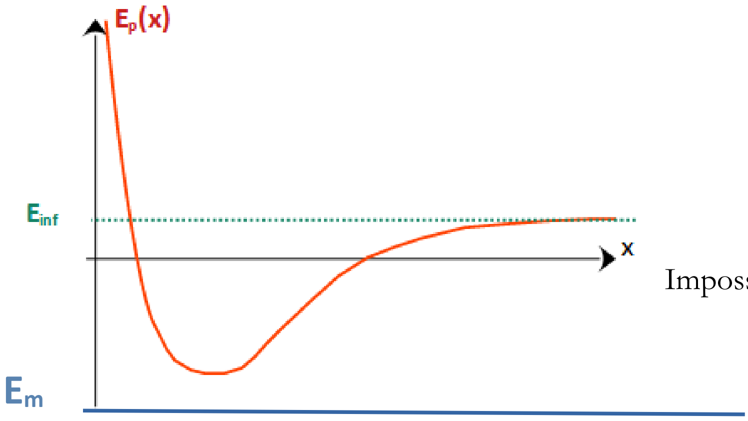
l'égalité est obtenue quand **v(x)=0 (système immobile)** alors $E_c = 0$ et $E_m = E_p$ **:**
c-à-d : L'énergie potentielle est égale à l'énergie mécanique quand le système est immobile

(**attention !!! Immobile ne veut pas dire à l'équilibre)**
Un système à l'équilibre est forcement immobile (ou en translation rectiligne uniforme) mais un système peut être momentanément immobile sans être à l'équilibre (système masse ressort lors d'un changement de direction)

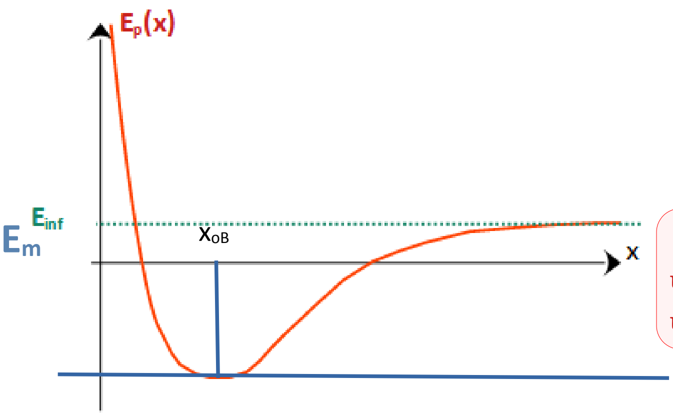
c) Interprétation graphique

On considère un système soumis seulement à des forces conservatives
on a donc E_m = cst notamment E_m ne dépend pas de la position x du système
la courbe représentative de E_m (x) est donc une droite horizontale
Si cette droite horizontale coupe la courbe E_p (x) alors cela signifie qu'il existe des position x_{nul} où la vitesse du système est nulle.
Les zones accessibles au système sont les abscisses pour lesquels $E_p(x) \leq E_m$

Plusieurs situation sont à envisager :



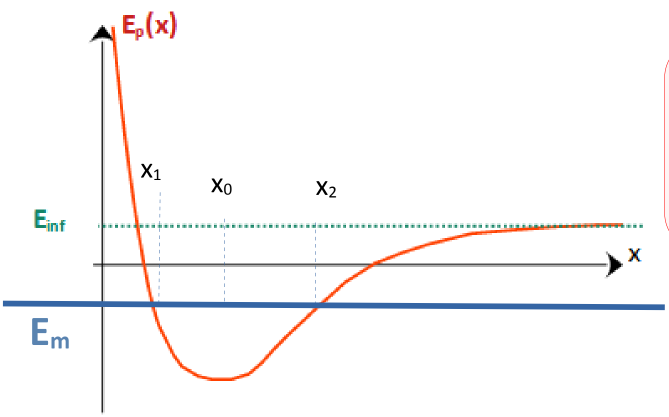
Impossible : il faut au mois un point pour lequel $Em(x) \geq E_p(x)$



Il existe un unique point pour lequel $Em(x_0) = E_p(x_0)$
il n'existe aucun point pour lequel $E_m \geq E_p(x)$

conclusion :

le système est immobile. De plus comme x_{0B} correspond à un minimum de l'énergie potentielle, le système est dans un équilibre stable



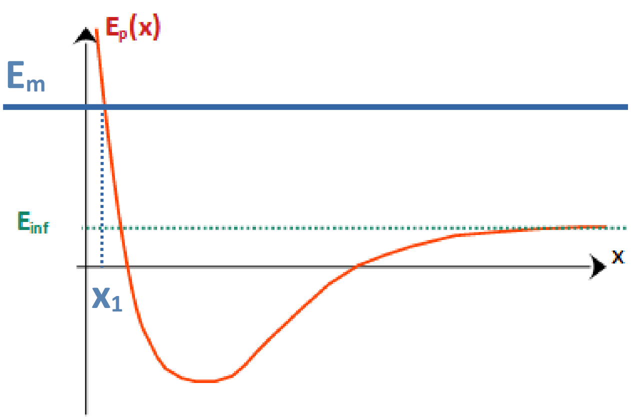
comme il faut $E_m \geq E_p(x)$ pour tout x accessible au système : le système ne peut accéder qu'à des positions x dans l'intervalle $[x_1, x_2]$

Le mouvement du système est borné : **on dit que le système est dans un <u>état lié</u>**

En x_1 et x_2 le système est immobile

En x_0 l'écart entre E_m et E_p est max donc $E_m - E_p$ est max donc

E_c est max donc $v(x_0)$ est la plus grande vitesse accessible

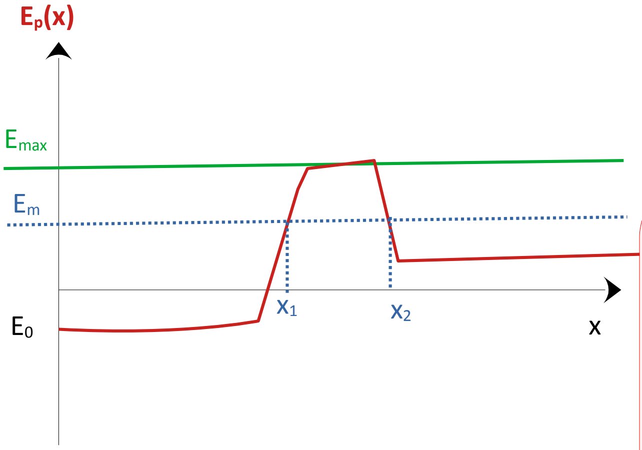


comme il faut $E_m \geq E_p(x)$ pour tout x :

Le système peut atteindre des valeurs de **x infiniment grandes** mais des positions tels que $x < x_1$ sont inaccessible

Comme l'intervalle de position accessible est infini : **on dit que le système est dans un état libre, ou <u>état de diffusion</u>**

Barrière de potentiel



Supposons qu'initialement le système soit dans la zone $x<x_1$ avec $E_m < E_{max}$: la zone $x>x_2$ est inaccessible

Par contre si initialement le système était dans la zone $x>x_2$ avec la même énergie mécanique,la zone $x <x_1$ serait accessible.

En partant de la zone $x<x1$ le système doit au moins momentanément posséder une énergie mécanique $E_m > E_{max}$ Pour pouvoir atteindre la zone $x>x_2$ même si une fois dans cette zone une énergie plus faible est suffisante pour y rester :

la courbe d'énergie potentielle possède une barrière de potentiel d'amplitude $E_{max}-E_0$

Exemples

(si la particule est initialement en $x <x_1$)

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_bifur.php

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscill_harm_FJ.php

III Énergie mécanique

3.1 Théorème de l'énergie mécanique

a) Énoncé

On considère un point M soumis seulement à des forces conservatives on a alors

$$E_m(M)=E_c(M)+\sum E_p(M)=cste$$

ou entre deux points A et B quelconques sur la trajectoire du système :

$$\Delta E_{M\,A\to B}=0$$

b) Demo :

Th de l'énergie cinétique entre deux points quelconques : $\Delta E_{c\,A\to B}=\sum W_{AB}(\vec{F})$

ici seulement des forces conservatives telles que $W_{A\to B}(\vec{F}_{cons})=-\Delta E_{p\,A\to B}=E_P(A)-E_p(B)$

ainsi $\Delta E_{c\,A\to B}=\sum -\Delta E_{p\,A\to B}\Rightarrow \Delta E_{c\,A\to B}+\sum \Delta E_{p\,A\to B}=0\Rightarrow \Delta E_{M\,A\to B}=0$

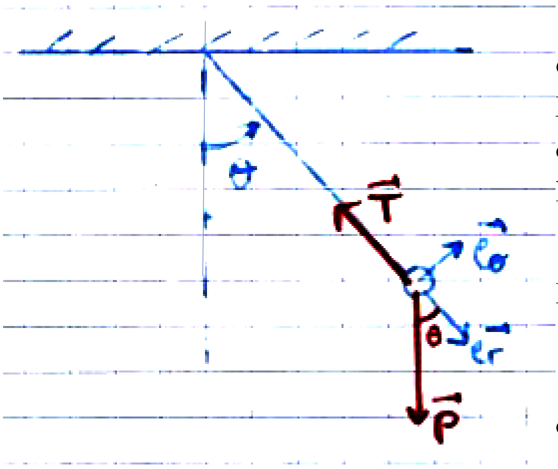
l'énergie mécanique ne varie pas entre deux points quelconques si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives

c) Généralisation :

Entre deux points A et B quelconques sur la trajectoire du système :

$$\Delta E_{m\,A\to B}=\sum W_{AB}(\vec{F}_{non\,cons})$$

3.2 Application au pendule simple



Objectif : retrouver l'équation du mouvement par une approche énergétique

Méthode : on veut faire apparaître l , θ , g et $\ddot{\theta}$ dans l'expression de E_p et E_c du système, on utilise ensuite le TEM

Rmq (pour faire apparaître $\ddot{\theta}$ il faudra utiliser une astuce)

Expression de l'énergie cinétique : $E_c=\frac{1}{2}mv^2$ ici $\vec{v}=l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow v^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=l^2\dot{\theta}^2$

donc $E_c=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$

Expression de l'énergie potentiel de pesanteur : $E_{pp}=mgz=mgl(1-\cos(\theta))$

TEM $E_m=cst \Leftrightarrow E_c+E_{pp}=cst \Leftrightarrow =\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2+mgl(1-\cos(\theta))=cste$

astuce : on aimerait faire apparaître la derivée seconde $\ddot{\theta}$ donc on dérive

$$\frac{dE_m}{dt}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ml^2 2\ddot{\theta}\dot{\theta}-mgl(-\dot{\theta}\sin(\theta))=0 \Leftrightarrow \dot{\theta}ml^2\ddot{\theta}+mgl\dot{\theta}\sin\theta=0 \Leftrightarrow \dot{\theta}(\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta)=0$$

soit $\dot{\theta}=0$ pas intéressant car pas de mouvement :

soit $\dot{\theta}\neq 0$, en divisant par $\dot{\theta}\neq 0$ on obtient $\boldsymbol{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}$

représentation de :

$E_{pp}(\theta)=mgl(1-\cos(\theta))$