Correction TD 14

EXERCICE 2

1. A priori $c = f(T, \mu)$. Posons $c = \alpha T^a \mu^b$ avec α cste sans dim.

On a

$$[c] = LT^{-1} \quad (1).$$

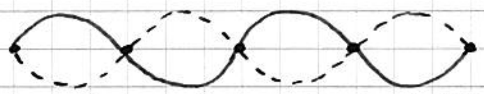
De plus,

$$[c] = (MLT^{-2})^a (ML^{-1})^b = M^{a+b} L^{a-b} T^{-2a} \quad (2)$$

Par identification de (1) et (2) on obtient :

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 1 \\ -2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = \alpha \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$ avec α cste sans dim.

2. Observation de 5 noeuds, avec 2 imposés aux étremités → mode 4.



Corde à 2 instants différents dans le mode de l'exercice.

D'après le cours, $f_n = n \frac{c}{2L}$ $\quad n \to$ numéro du mode, ici 4 (4 fuseaux, 5 noeuds)

donc ici $f_4 = 4 \frac{c}{2L} = \frac{2c}{L}$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, on obtient

$$f_4 = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$. Isolons μ : $f_4^2 = \frac{4}{L^2}\frac{T}{\mu}$

soit $\boxed{\mu = \frac{4T}{(Lf_4)^2}}$ Rq : $\left[\frac{4T}{(Lf_4)^2}\right] = \frac{MLT^{-2}}{(LT^{-1})^2} = \frac{M}{L} = [\mu]$ → homogène.

A.N. $\mu = \frac{4 \times 10}{(2{,}0 \cdot 10)^2} \Rightarrow \underline{\mu = 1{,}0 \cdot 10^{-1}\ kg.m^{-1}}$

EXERCICE 3

1. Voir exercice 3 que. 1.
2. D'après le cours,

$$f_n = n \frac{c}{2L} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

donc $f_1 = \frac{c}{2L}$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$

3. $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Il y a donc 3 facteurs sur lesquels on peut agir pour obtenir des sons de hauteurs differentes : L, T et μ.

→ On nous dit que T varie très peu pour uniformiser les contraintes. Les cordes du piano sont d'autant plus longues qu'elles sont plus graves, mais l'allongement ne suffit pas à couvrir l'étendue du clavier.
→ Pour avoir f encore plus grave, il faut μ plus grand. C'est pour cela qu'on rajoute du cuivre → $\mu \nearrow$ et donc $f \searrow$ et donc on peut aller ds des sons plus graves.

EXERCICE 5

1. $y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$.

or (CL) :
$\underline{\underline{\forall t}}$ $y(L,t) = 0 \Rightarrow \forall t \quad A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kL + \psi) = 0$

Or $A \neq 0$ et $\exists t$ tq $\cos(\omega t + \varphi) \neq 0$ donc

$$\cos(kL + \psi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad kL + \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$$

soit

$$\boxed{\psi = -kL + \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi} \quad p \in \mathbb{Z}$$

2. D'après 1, $y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos\left(kx - kL + \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$

or, $\cos\left(a + \frac{\pi}{2} + p\pi\right) = (-1)^{p+1}\sin(a)$
donc

$$y(x,t) = (-1)^{p+1}A\cos(\omega t + \varphi)\sin(kx - kL) \qquad (*)$$

or, $\forall t$, $y(0,t) =$ a vibreur $\cos(\omega t)$ (CL) (1)

et (d'après (*)) $y(0,t) = (-1)^{p+1}A\cos(\omega t + \varphi)\sin(-kL)$ (2)

par identification de (1) et (2),
$$\begin{cases} \varphi = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{et} \\ a_{\text{vibreur}} = (-1)^p \sin(kL) A \end{cases}$$

donc en remplaçant dans (*) $\Rightarrow y(x,t) = \dfrac{a_{\text{vibreur}}}{(-1)^p\sin(kL)} \times (-1)^p\cos(\omega t)\sin(k(L-x))$

soit

$$\boxed{y(x,t) = \frac{a_{\text{vibreur}}}{\sin(kL)}\cos(\omega t)\sin(k(L-x))} \quad \text{si } \sin(kL) \neq 0.$$

EXERCICE 6

1. $\boxed{y_r(x,t) = Y_m\cos(\omega t + kx + \varphi_r)}$ $(x \searrow)$

2. B fixe $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\forall t}}$ $y(L,t) = 0$

$y(L,t) = y_i(L,t) + y_r(L,t) = Y_m\left(\cos(\omega t - kL + \varphi_i) + \cos(\omega t + kL + \varphi_r)\right)$

$$\Rightarrow \boxed{y(L,t) = 2Y_m\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_i + \varphi_r}{2}\right)\cos\left(kL + \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}\right)}$$

$\forall t,\ y(L,t) = 0 \iff \forall t,\ 2Y_m \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_i + \varphi_r}{2}\right) \cos\left(kL + \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}\right) = 0$

or $2Y_m \neq 0$ et $\exists t$ tq $\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_i + \varphi_r}{2}\right) \neq 0$ donc

$$\cos\left(kL + \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad kL + \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + p\pi \qquad p \in \mathbb{Z}$$

soit $\quad \Delta\varphi = 2\pi\left(p + \frac{1}{2}\right) - 2kL$

$$\iff \quad \boxed{\Delta\varphi = -2kL + (2p+1)\pi,\ p \in \mathbb{Z}}$$

3. $y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) = 2Y_m \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(kx + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$

avec $\varphi = \frac{\varphi_r + \varphi_i}{2}$ et $\frac{\Delta\varphi}{2} = \pi\left(p + \frac{1}{2}\right) - kL$

soit $y(x,t) = 2Y_m \cos(\omega t + \varphi) \underbrace{\cos\left(k(x-L) + \frac{\pi}{2} + p\pi\right)}_{(-1)^{p+1} \sin(k(x-L))}$

soit $\boxed{y(x,t) = 2Y_m (-1)^p \cos(\omega t + \varphi) \sin(k(L-x))} \qquad p \in \mathbb{Z}$

→ ceci est une onde stationnaire car sous la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$. les paramètres x et t sont découplés.

EXERCICE 7

1. extrémités ouvertes, $p = 0 \Rightarrow$ noeud de vibration aux extremités.

a.

MODE 1

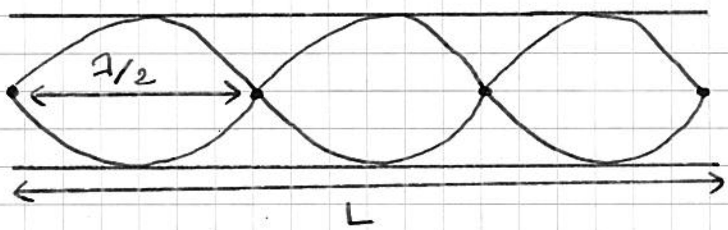
on impose $s(0,t)$ et $s(L,t) = 0$ $\forall t$,

c'est le cas du cours donc $f_n = n f_1$

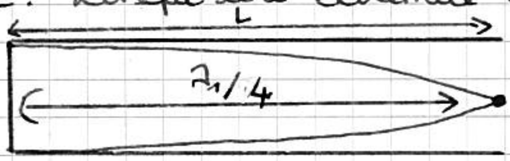
$$\boxed{f_n = n \frac{c}{2L}}$$

b. Mode 3 → 4 noeuds dont 2 aux extremités → 3 fuseaux.

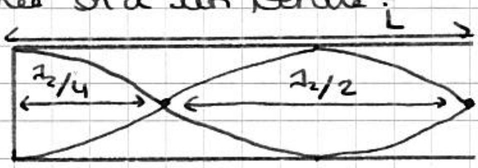
Mode 3 :



c. Lorsqu'une extremité est fermée on a un ventre :



MODE 1



MODE 2

Dans le mode 1, $L = \frac{\lambda_1}{4}$ Dans le mode 2, $L = \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4}$

Dans le mode n, $L = \frac{\lambda_n}{4} + (n-1)\frac{\lambda_n}{2}$

$\Rightarrow \quad L = \frac{\lambda_n}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right) \quad$ or $\quad \lambda_n = \frac{c}{f_n}$

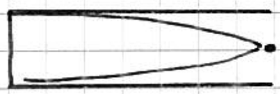
donc

$$L = \frac{c}{2f_n}\left(n - \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_n = \frac{c}{2L}\left(n - \frac{1}{2}\right) \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_n = \frac{c}{4L}\,(2n - 1) \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

2\. a. $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$ A.N. $\lambda = \frac{340}{34}$ m $\Rightarrow$ $\underline{\lambda = 10\,m}$

b.



MODE 1

$\Rightarrow \quad f_n = \frac{c}{4L}(2n-1)$

mode 1 $\quad f = \frac{c}{4L}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{c}{4f}} \qquad \text{A.N.} \quad L = \frac{340}{4 \times 34} \Rightarrow \underline{L = 2{,}5\,m}$$

EXERCICE 8

1\. D'après le cours, $s(t) = A_{TOT}\cos(\omega t + \varphi)$

avec $A_{TOT}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)$

On donne $I_{MAX} = \langle s^2_{max}(t) \rangle = \langle A^2_{max_{TOT}} \cos(\omega t + \varphi)^2 \rangle$

or $\quad A^2_{TOT\,max} = (A_1 + A_2)^2 \quad$ et $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$

(en effet $\langle \cos(x) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = 0$, $\langle \cos^2(x) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2(x)}_{\frac{1+\cos(2a)}{2}}\,dx = \frac{1}{2}$)

donc $\quad \boxed{I_{MAX} = \frac{(A_1 + A_2)^2}{2}}$

de m̂ $\quad I_{MIN} = \langle A^2_{MIN_{TOT}} \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = A^2_{MIN_{TOT}} \times \frac{1}{2}$

or $\quad A_{min_{TOT}} = |A_1 - A_2| \quad$ donc

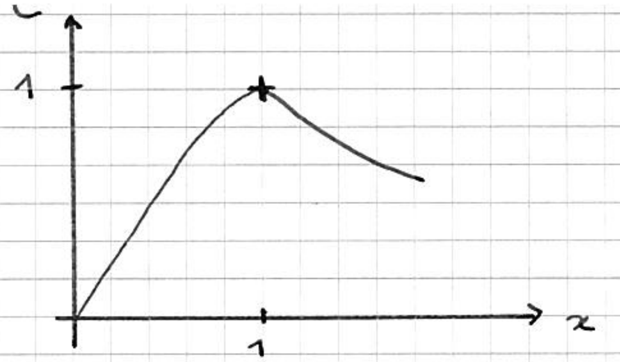
$\boxed{I_{MIN} = \frac{(A_1 - A_2)^2}{2}}$ $\Rightarrow$ cohérent car si $A_1 = A_2$, $I_{MIN} = 0$
et $I_{MAX} = 2A^2$
↳ maximal.

2\. a. $I_{max} - I_{min} < I_{max} + I_{min} \rightarrow C \in [0, 1]$ ok.
$I_{max} - I_{min} \nearrow \Rightarrow C \nearrow$ ok.

b. $C = \frac{(A_1+A_2)^2 - (A_1-A_2)^2}{(A_1+A_2)^2 + (A_1-A_2)^2} = \frac{4A_1A_2}{2A_1^2 + 2A_2^2} = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2A_1A_2 \times \frac{1}{A_1^2}}{(A_1^2 + A_2^2) \times \frac{1}{A_1^2}}$

soit

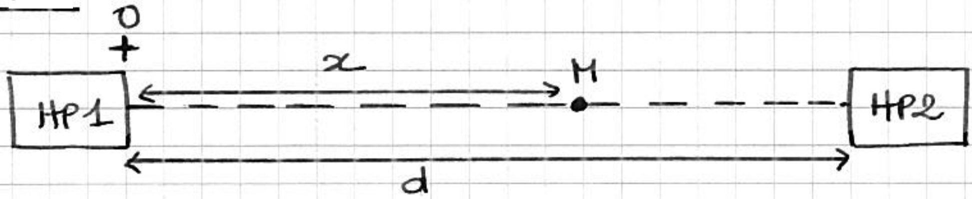
$$\boxed{C = \frac{2x}{1 + x^2} \quad \text{avec } x = \frac{A_2}{A_1}}$$



C est maximum pour $x = 1$
$\Leftrightarrow \quad A_1 = A_2 = A$.

C augmente avec la qualité de la figure d'interférence.

EXERCICE 9



1. Le signal 1 est selon les $x \nearrow$ et son origine est en $x = 0$.

on a $p_1(x_1, t) = p_1\left(x_0, t - \frac{x_1 - x_0}{c}\right)$ avec $x_1 > x_0$

en prenant $x_1 = x$ et $x_0 = 0$,

$$p_1(x,t) = p_1\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

cohérent ($x \nearrow$)

Or, $p_1(0,t) = P_0 \cos(2\pi f t + \varphi_0)$ donc $\boxed{p_1(x,t) = P_0 \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} x + \varphi_0\right)}$

De plus, l'onde émise par HP2 est la même en x à l'instant t que celle en d à l'instant $t - \frac{d-x}{c}$

donc $p_2(x,t) = p_2\left(d, t - \frac{d-x}{c}\right)$

or $p_2(d,t) = P_0 \cos(2\pi f t + \varphi_0)$ donc

$$p_2(x,t) = P_0 \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c}(d-x) + \varphi_0\right)$$

cohérent ($x \searrow$)

$$\Rightarrow \boxed{p_2(x,t) = P_0 \cos\left(2\pi f t + \frac{2\pi f}{c} x + \varphi'\right) \text{ avec } \varphi' = \varphi_0 - \frac{2\pi f}{c} d}$$

2. $p_1(x,t) + p_2(x,t) = P_0\left(\cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} x + \varphi_0\right) + \cos\left(2\pi f t + \frac{2\pi f}{c} x + \varphi'\right)\right)$

$$\Rightarrow \quad p_1 + p_2 = 2P_0 \cos\left(2\pi f t + \frac{\varphi_0 + \varphi'}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi f}{c} x + \frac{\varphi' - \varphi_0}{2}\right)$$

or $\frac{\varphi_0 + \varphi'}{2} = \left(2\varphi_0 - \frac{2\pi f}{c} d\right) \times \frac{1}{2} = \varphi_0 - \frac{\pi f}{c} d$

et $\frac{\varphi' - \varphi_0}{2} = -\frac{\pi f d}{c}$

donc

$$\boxed{p(x,t) = 2P_0 \cos\left(2\pi f t - \frac{\pi f}{c} d + \varphi_0\right) \cos\left(\frac{2\pi f}{c} x - \frac{\pi f d}{c}\right)}$$

↳ ceci est une onde stationnaire (variables x et t découplées) → cohérent car on observe des pts d'amplitude min. et max.

donc $\Rightarrow$ distance entre deux $\left\{\begin{array}{l}\text{ventres}\\ \text{noeuds}\end{array}\right.$ consécutifs $= \lambda/2$.

donc $\frac{\lambda}{2} = e \iff \lambda = 2e$. or $c = \lambda f$ donc

$$\boxed{c = 2ef}$$ A.N. $c = 2 \times 13{,}8 . 10^{-2} . 1250$

$\Rightarrow$ $\underline{c = 345 \ m.s^{-1}}$ (cohérent)

EXERCICE 10

1. interférences destructives $\Rightarrow \cos(\Delta\varphi) = -1$

soit $\boxed{\Delta\varphi = (2p+1)\pi}$ $p \in \mathbb{Z}$

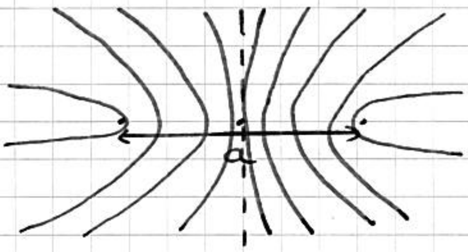
or $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2)$ donc

$$\Delta\varphi = (2p+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2)$$

soit

$$\boxed{d_1 - d_2 = \frac{\lambda}{2} + p\lambda} \quad p \in \mathbb{Z}$$

2. On vérifie graphiquement :



$\rightarrow$ branches d'hyperboles

3. Pour $M \in (Ox)$, les interférences sont destructives.
donc

$$d_1 - d_2 = \frac{\lambda}{2} + p\lambda$$

or $|d_1 - d_2| = a$ pour un pt de l'axe (Ox) qui n'appartient pas à $[S_1S_2]$.

Donc $a = \frac{\lambda}{2} + p\lambda \iff \boxed{\frac{a}{\lambda} = p + \frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$

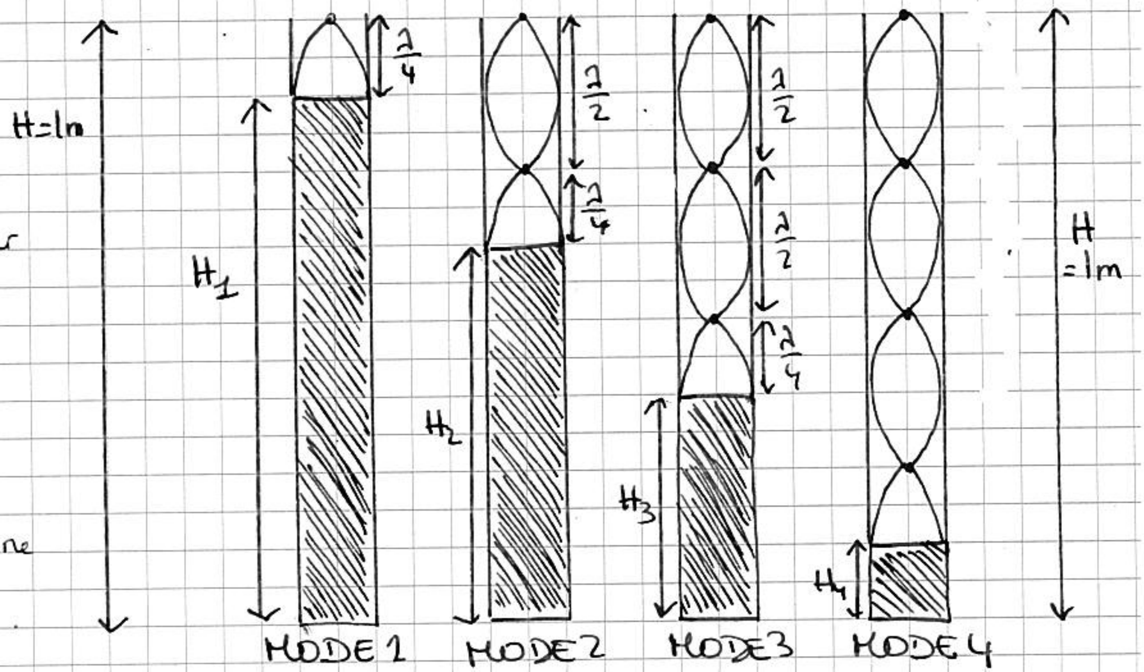
donc $\frac{a}{\lambda}$ est un DEMI entier naturel.

4. Sur l'axe (Oy), on a $d_1 = d_2$ (def de la médiatrice) et donc
$\Delta\varphi = 0$ soit $\cos(\Delta\varphi) = 1 \Rightarrow$ interférences constructives.

EXERCICE 11

Dans cet exercice, f est imposée et vaut 440 Hz, et comme $c = \lambda f$, λ est aussi imposée.
Autrement dit, $\forall$ le mode dessiné, la distance entre deux noeuds (qui vaut $\frac{\lambda}{2}$) ne change pas (c'est la hauteur d'eau qui change pour s'adapter)

Le signal ici est la surpression acoustique.
Les CL sont imposées par le contexte.
On représente le cylindre à chaque fois qu'une onde stationnaire est possible. (sachant que λ ne change pas car f est fixé).



On remarque que $H - H_n = \frac{\lambda}{4} + (n-1)\frac{\lambda}{2}$

or $\lambda = \frac{c}{f}$

donc $H_n = H - \frac{\lambda}{4} - (n-1)\frac{\lambda}{2} = H - \frac{c}{f}\left(\frac{1}{4} + (n-1)\times\frac{1}{2}\right)$

soit $H_n = H - \frac{c}{2f}\left(\frac{1}{2} + n - 1\right)$

et donc $\boxed{H_n = H - \frac{c}{2f}\left(n - \frac{1}{2}\right) = H - \frac{(2n-1)c}{4f}}$ avec $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_n \geqslant 0$

Calculons les différents H_n.

$\boxed{H_1 = H - \frac{c}{2f}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = H - \frac{c}{4f}}$

A.N. $\underline{H_1 = 80 \text{ cm}}$

$\boxed{H_2 = H - \frac{c}{2f}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = H - \frac{3c}{4f}}$

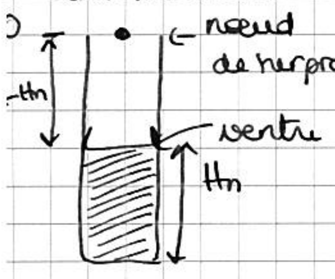
A.N. $\underline{H_2 = 42 \text{ cm}}$

$\boxed{H_3 = H - \frac{c}{2f}\left(3 - \frac{1}{2}\right) = H - \frac{5c}{4f}}$

A.N. $\underline{H_3 = 3{,}4 \text{ cm}}$

Rq. H_4 n'existe pas.

2ème méthode :



Posons $p(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$

$$\text{CL} : \begin{cases} \forall t \quad p(0,t) = 0 & (1) \\ \exists t \mid |A\cos(\omega t + \varphi)|\,|\cos(k(H - H_n) + \psi)| = A & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \cos(\psi) = 0$ soit $\psi = \frac{\pi}{2} + p\pi$

donc (2) devient $\exists t : |A\cos(\omega t + \varphi)|\,|\sin(k(H - H_n))| = A$

$$\Rightarrow |\sin(k(H - H_n))| = 1$$

$$\Rightarrow k(H - H_n) = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(H - H_n) = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (\lambda \text{ imposé car } f \text{ imposé})$$

$$\Rightarrow H - H_n = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow H_n = H - \frac{\lambda}{4} - n\frac{\lambda}{2} \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow H_n = H - \frac{c}{2f}\left(\frac{1}{2} + n\right)$$ avec $n \in \mathbb{N}$ tq $0 < H_n < H$.

→ mêmes résultats que précédemment.

TD14- SUPERPOSITION DE SIGNAUX

Correction partie battements

Exercice 12 : Battements

1. Sur le graphe on observe que $4T_{batt} = 200\text{ ms}$. donc $\underline{T_{batt} = 50\text{ ms}}$

2. D'après le cours, $T_{batt} = \dfrac{1}{\Delta f}$ donc $\boxed{\Delta f = \dfrac{1}{T_{batt}}}$

A.N. $\Delta f = \dfrac{1}{50\times10^{-3}} \Rightarrow \underline{\Delta f = 20\text{ Hz}}$

Exercice 13 : Battements (bis)

1. Sur l'oscilloscope, on lit $5T_{batt} = 720\text{ ms}$ donc $T_{batt} = 144\text{ ms}$

D'après le cours $\boxed{\Delta f = \dfrac{1}{T_{batt}}}$ donc $\underline{\Delta f = 6,94\text{ Hz}}$

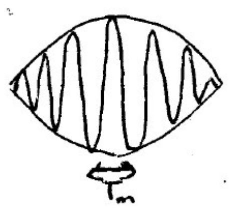
2. L'élève connaît déjà $f_2 - f_1 = 6,94\text{ Hz}$ → une équation à 2 inconnues. Il faut une deuxième équation faisant intervenir f_1 et f_2.

On a vu dans le cours que

$$s(t) = 2A \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \varphi_m\right)}_{\text{varie rapidement avec une PULSATION } \frac{2\pi(f_1+f_2)}{2}} \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2} + \varphi_{mod}\right)$$

donc (avec une fréquence de $\frac{f_1+f_2}{2}$)

L'élève doit donc "zoomer" en modifiant la base de temps jusqu'à observer



ensuite, il faut mesurer la période des variations rapides (T sur le schéma), en déduire que

$$\frac{1}{T_m} = \frac{(f_1+f_2)}{2}$$

$$\Rightarrow f_1 + f_2 = \frac{2}{T_m}$$ → deuxième équation à 2 inconnues.

Ensuite il suffit de résoudre le système pour avoir f_1 et f_2.