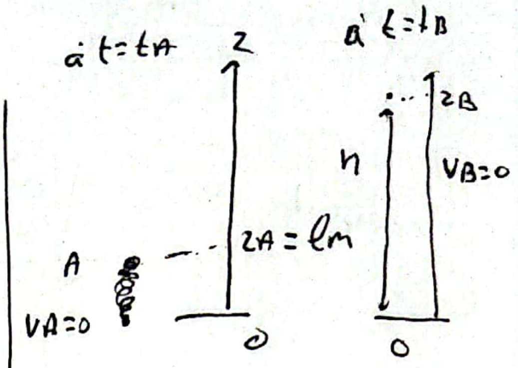
TD 15 Correction

Exercice 2

1] On suppose qu'il n'y a pas de forces non conservatives TEM entre t_A et t_B :

$$\Delta E_m(A \to B) = 0$$



$$\Delta E_{pp}(A \to B) + \Delta E_{pel}(A \to B) + \Delta E_c(A \to B) = 0$$

$$mgz_B - mgz_A + \frac{1}{2}K(\ell_0 - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}K(\ell_m - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = 0$$

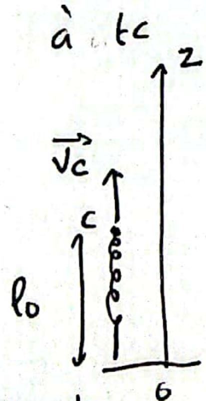
la queue est détendue

$$mgh - \frac{1}{2}K(\ell_m - \ell_0)^2 = 0$$

$$\boxed{K = \frac{2mgh}{(\ell_m - \ell_0)^2}}$$

A.N $K = 4,4\,10^3\ N.m^{-1}$

TEM entre t_A et t_C (on peut aussi faire entre C et B)*



$$\Delta E_m(A \to C) = 0 \iff \Delta E_c(A \to C) + \Delta E_{pp}(A \to C) + \Delta E_{pel}(A \to C) = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}m\cancel{v_A^2}^{\,0} + \underbrace{mgz_C - mgz_A} + \frac{1}{2}K\cancel{(\ell_0 - \ell_0)^2}^{\,0} - \frac{1}{2}K(\ell_m - \ell_0)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mg(\ell_0 - \ell_m) - \frac{1}{2}K(\ell_m - \ell_0)^2 = 0$$

$$mv_C^2 = K(\ell_m - \ell_0)^2 - 2mg(\ell_0 - \ell_m)$$

$$v_C^2 = \frac{K}{m}(\ell_m - \ell_0)^2 - 2g(\ell_0 - \ell_m)$$

$$= \frac{2\cancel{m}gh\cancel{(\ell_m - \ell_0)^2}}{\cancel{m}\cancel{(\ell_m - \ell_0)^2}} - 2g(\ell_0 - \ell_m)$$

$$v_C^2 = -2g(\ell_0 - \ell_m) + 2gh$$

$$\boxed{v_C = \sqrt{2gh - 2g(\ell_0 - \ell_m)}}$$

A.N $v_C = 11,7\ m/s$

* autre méthode entre C et B

$$\Delta E_m(C \to B) = 0$$

$$\iff mg\underbrace{(z_B - z_C)}_{h - \ell_0} + \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mg(h - \ell_0)$$

$$v_C = \sqrt{2g(h - \ell_0)}$$

A.N $v_C = 12,5\ m/s$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

1) $\Delta Ec_{(A\to B)} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$ ici la seule force est $\vec{P} = m\vec{g}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} m v_B^2 - \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{0 \text{ car sans élan}} = W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = mgh$

finalement $\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$ A.N $v_B = 31,3\ m/s$

$v_B > v_{max} \Rightarrow$ norme pas respectée

2) $\Delta Ec_{(A\to B)} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{f})$ $\vec{f}$ étant la force de frottement fluide ⚠ de norme variable

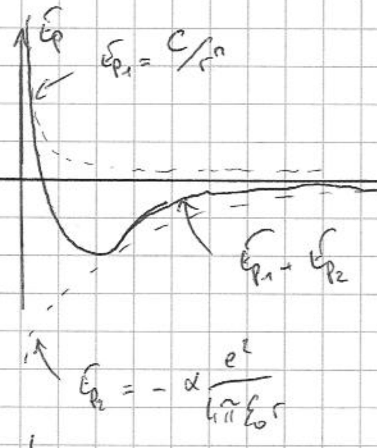
$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} m v_B^2 - \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{0} = mgh + W_{A\to B}(\vec{f})$

$\boxed{W_{A\to B}(\vec{f}) = \frac{1}{2} m v_B^2 - mgh}$ A.N: $W_{A\to B}(\vec{f}) = -13,3\ 10^3\ J$

$W_{A\to B}(\vec{f}) < 0$ car $\vec{f}$ est résistante

Exercice 4 : Vibration d'une molécule diatomique

1)



1er terme : $E_{p_1} = \dfrac{C}{r^n}$

$$\delta W(\vec{F_1}) = \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = F_1\, dr = -dE_{p_1}$$

$$\Rightarrow F_1 = -\frac{dE_{p_1}}{dr} = \frac{+nC}{r^{n+1}}$$

donc $\vec{F_1} = F_1 \vec{u_r}$ avec $F_1 > 0$ répulsive

2ème terme : $E_{p_2} = -\alpha \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$F_2 = -\frac{dE_{p_2}}{dr} = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} < 0 \text{ force attractive}$$

2) $\dfrac{dE_p}{dr}(r_0) = 0 \Rightarrow \dfrac{-nC}{r_0^{n+1}} + \alpha \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{nC}{r_0^{n+1}} = \alpha \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$

3) DL de E_p à l'ordre 2 au voisinage de r_0 :

$$E_p(r) \simeq E_p(r_0) + (r-r_0)\underbrace{\frac{dE_p}{dr}(r_0)}_{=0} + \frac{1}{2}(r-r_0)^2 \underbrace{\frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0)}_{=k}$$

$$\simeq E_p(r_0) + \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$ ce qui correspond à l'E_p d'un oscillateur élastique de raideur k

$$k = \frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0) = \frac{n(n+1)C}{r_0^{n+2}} - \alpha \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} = \frac{n(n+1)C}{r_0^{n+2}} - \frac{2}{r_0}\frac{nC}{r_0^{n+1}}$$

$$= \frac{n(n+1)C - 2nC}{r_0^{n+2}} = n(n-1)\frac{C}{r_0^{n+2}}$$

4) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $E_d = -E_p(r_0) = -\dfrac{C}{r_0^n} + \alpha \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -\dfrac{C}{r_0^n} + r_0 \dfrac{nC}{r_0^{n+1}}$

$$= (n-1)\frac{C}{r_0^n} = k\frac{r_0^2}{n}$$

5) $k = \omega_0^2 m$ AN : $k = 493\ N.m^{-1}$

$n = kr_0^2 / E_d$ AN : $n = 12$ (avec E_d = $\dfrac{400.10^3}{6,02.10^{23}}$ J) ← pour une seule molécule

$C = k\, r_0^{n+2} / n(n-1)$ AN : $C = 1,06.10^{-138}$

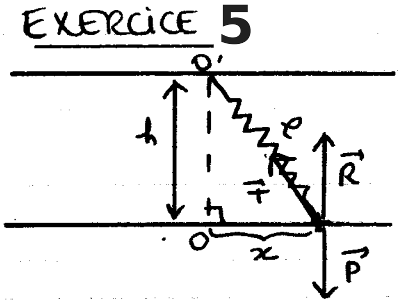
$\alpha = \dfrac{nC}{r_0^{n+1}} \dfrac{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}{e^2}$ AN : $\alpha = 0,4$

6) On peut imaginer de faire entrer en résonance la molécule en l'excitant avec une onde électromagnétique de fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 8,67 \cdot 10^{13}$ Hz

soit une longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 3,46$ µm (infrarouge)

7) Lorsque l'amplitude des oscillations devient grande, le puits de potentiel n'est plus du tout parabolique. L'approximation harmonique n'est plus valable et la fréquence de résonance de la molécule n'est plus f_0. L'onde excitatrice n'est alors plus efficace et l'amplitude des oscillations n'augmente plus. Il faudrait pouvoir adapter la fréquence de l'onde excitatrice à l'amplitude des oscillations (cf. pendule, botafumeiro, balançoire ...)

EXERCICE 5



1. Système : {anneau}   Réf : TSG
BDF : $\vec{T}$, $\vec{P}$, $\vec{R} = \vec{R_N}$ (pas de frottements)

a. Ressort : $E_{p,el} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + cste$

Rq : ici, pour l'anneau, $z = cste \Rightarrow E_{pp} = cste$ et, $\forall t$, $\vec{R} \perp \vec{v}$ donc $\vec{R}$ ne travaille pas ($\vec{P}$ non plus d'ailleurs ici).

Donc $E_p = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + cste$. Que vaut l ici ?

Pythagore : $x^2 + h^2 = l^2$ donc $l = \sqrt{x^2 + h^2}$ et donc

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0\right)^2 + cste}$$

b. On détermine $\frac{dE_p}{dx}$ (et $\underline{\underline{\text{PAS}}}$ $\frac{dE_p}{dt}$!!!) ⚠

Ici

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2+x^2}-l_0\right)^2\right) = \frac{1}{2}k \times 2 \times \left(\sqrt{h^2+x^2}-l_0\right) \times \frac{2x}{2\sqrt{h^2+x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dx} = \frac{kx\left(\sqrt{h^2+x^2}-l_0\right)}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

A l'équilibre, $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}} = 0 \iff k x_{eq}\left(\sqrt{h^2+x_{eq}^2}-l_0\right) = 0$

$\iff$

$x_{eq} = 0$ $\quad$ $\boxed{\text{ou}}$ $\quad \sqrt{h^2+x_{eq}^2} - l_0 = 0$

$\iff h^2 + x_{eq}^2 = l_0^2$

$\iff x_{eq}^2 = l_0^2 - h^2$ ⚠ n'existe que si $l_0 > h$ (c'est le cas ici)

Donc, 3 positions d'équilibre :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{eq} = 0 \\ x_{eq} = -\sqrt{l_0^2-h^2} \\ x_{eq} = +\sqrt{l_0^2-h^2} \end{array}}$$

c. Stabilité : déterminons le signe de $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$. si $>0 \to$ stable, si $<0 \to$ instable.

On avait : $\frac{dE_p}{dx} = kx - \frac{kl_0x}{\sqrt{h^2+x^2}}$

$$\text{donc} \quad \frac{d^2E_p}{dx^2} = k - kl_0\frac{d}{dx}\left(x \times (h^2+x^2)^{-1/2}\right)$$

$$= k - kl_0\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right)(h^2+x^2)^{-3/2} \times 2x\right)$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\frac{d^2E_p}{dx^2} = k - \frac{kl_0}{\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{kl_0x^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}}$$

• Pour $x_{eq} = 0$, $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} = k - \frac{kl_0}{h} + 0 = k\left(1-\frac{l_0}{h}\right) < 0$ ← car $h<l_0$ ici.

→ $\boxed{x_{eq} = 0 \text{ est INSTABLE}}$ ← $h<l_0$ (logique physiquement).

• Pour $x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2-h^2}$

$$\text{alors} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} = \underbrace{k - \frac{kl_0}{l_0}}_{=0} + \underbrace{\frac{kl_0x_{eq}^2}{(h^2+x_{eq}^2)^{3/2}}}_{>0}$$

→ $\boxed{x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2-h^2} \text{ sont STABLES}}$ ← $h<l_0$

2. Dans le cas $h > l_0$, $\exists$ une seule position d'équilibre $x_{eq} = 0$ et

$$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}=0} = k\left(1-\frac{l_0}{h}\right) > 0 \quad (\text{car } h > l_0).$$

donc si $\boxed{h > l_0,\ x_{eq} = 0 \text{ est STABLE}}$ ← $h>l_0$

Exercice 6

1) $\delta W(\vec{f}) = \vec{f}\cdot dx\,\vec{e_x} = -\alpha\,\vec{v}\cdot dx\,\vec{e_x} = -\alpha\,\dot{x}\,\vec{e_x}\cdot dx\,\vec{e_x}$

$$\boxed{\delta W(\vec{f}) = -\alpha\,\dot{x}\,dx}$$

2) $W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_{x_A}^{x_B} \delta W(\vec{f}) = \int_{t_A=0}^{t_B=T} \mathcal{P}(\vec{f})\,dt$

avec $\mathcal{P}(\vec{f}) = \dfrac{\delta W(\vec{f})}{dt} = -\alpha\,\dot{x}\,\dfrac{dx}{dt} = -\alpha\,\dot{x}^2 = -\alpha\,\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

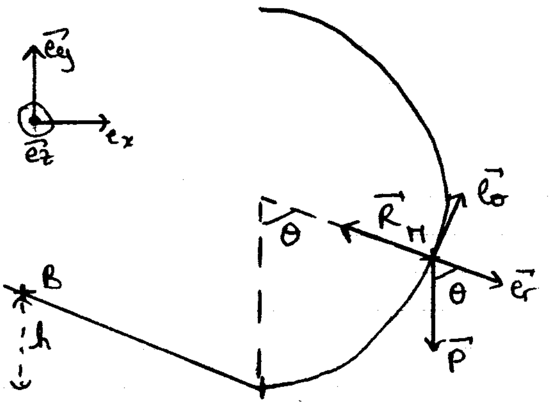
$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_0^T -\alpha\,\dot{x}^2\,dt = \int_0^T -\alpha\,\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,dt$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = -\alpha A^2\omega^2\int_0^T \frac{1-\cos(2(\omega t+\varphi))}{2}\,dt = \boxed{-\alpha A^2\omega^2\,\frac{T}{2}}$$

$[A]=L$, $[T]=T$, $[\alpha] = \dfrac{[\|\vec{f}\|]}{[\|\vec{v}\|]} = \dfrac{M\,L\,T^{-2}}{L\cdot T^{-1}} = M\cdot T^{-1}$, $[\omega]=T^{-1}$

$[W_{A\to B}(\vec{f})] = \underbrace{M L^2\cdot T^{-2}}_{\text{dim énergie}}$ et $\left[-\dfrac{\alpha A^2\omega^2 T}{2}\right] = M\cdot T^{-1}\times L^2\times (T^{-1})^2\,T = M L^2 T^{-2}$
CQFD

EXERCICE 7



1. Même méthode que l'exercice sur l'inuit. But ultime : exprimer R en fonction de θ et chercher pour quelle hauteur h R existe toujours $\forall\theta$.

MÉTHODE : ① grâce au PFD on exprime R en fonction de θ et v

② grâce au TEC on exprime v en fonction de θ

③ on en déduit une expression de R en fonction de θ (et éventuellement h, a, etc., ce qui compte c'est qu'il n'y ait plus de $\dot\theta$, v, et toute autre valeur non constante)

④ on cherche h_{min} tq $R(h_{min}) = 0$ lorsque $\theta = +\pi$ (le point aura donc fait tout le tour avant de tomber.

Système : { M, masse m }
Réf : TSG
BDF : $\vec{P}, \vec{R}$
↳ $\vec{P} = mg\cos(\theta)\vec{e_r} - mg\sin(\theta)\vec{e_\theta}$
$\vec{R} = -R\vec{e_r}$

① PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$ avec $\vec{v} = v\vec{e_\theta}$ (car $\dot r = 0$)
et donc :
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{a}\vec{e_r} + \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$$

On projette le PFD sur l'axe porté par $\vec{e_r}$:
$$-m\frac{v^2}{a} = mg\cos(\theta) - R \text{ donc } \boxed{R = mg\cos(\theta) + m\frac{v^2}{a}}$$

② On cherche v en fonction de θ (et h, a, etc.)

TEC : $\Delta Ec_{BM} = \sum W_{BM}(\vec{F_{ext}})$ avec B le pt de départ de la masse.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{=0 \text{ car } v_{initiale}=0} = W_{BM}(\vec{P}) + \underbrace{W_{BM}(\vec{R})}_{=0 \text{ car } \forall t,\ \vec{R}\cdot\vec{v} = 0}$$

$\vec{R}$ selon $\vec{e_r}$, $\vec{v}$ selon $\vec{e_\theta}$ → $\delta W(\vec{R}) = \vec{R}.\vec{v}dt = 0$.

De plus, $W_{BM}(\vec{P}) = mg(y_B - y_M)$ ($\vec{e_y}\uparrow$)

Or, ici, $y_B = h$ et $y_M = a - a\cos(\theta)$ (valable aussi pour $\theta > \frac{\pi}{2}$ car ds ce cas $y_M > a$ comme $\cos(\theta) < 0$)

donc $W_{BM}(\vec{P}) = mg(h - a + a\cos(\theta))$

et donc $\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - a + a\cos(\theta))$

donc
$$\boxed{\frac{mv^2}{a} = \frac{2mg}{a}(h - a + a\cos(\theta))}$$

③ or $R = mg\cos(\theta) + m\frac{v^2}{a}$ donc $R = mg\cos(\theta) + \frac{2mg}{a}(h - a + a\cos(\theta))$

soit
$$\boxed{R = mg\left(3\cos(\theta) + \frac{2h}{a} - 2\right)}$$ homogène

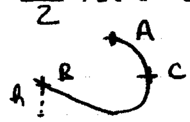
④ On remarque que $R\downarrow$ qd $\theta\nearrow$, sa valeur étant minimale en A (logique!).

la masse effectue un looping si R (au pt A) $\neq 0$. Or, en A, $\theta = +\pi$, et donc $\cos(\theta) = -1$.

$R \geqslant 0$ pour $\cos(\theta) = -1$ donc $mg\left(3\times(-1) + \frac{2h}{a} - 2\right) \geqslant 0$

$$\Rightarrow \quad -5 + \frac{2h}{a} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h \geqslant \frac{5a}{2} = h_{lim}}$$

On doit lâcher M d'une hauteur au moins égale à $\frac{5a}{2}$ si on veut que M fasse un tour complet du cercle.



2. M ne peut quitter la gouttière qu'entre C et A.
Cas limites :

$\begin{cases} \text{M quitte la gouttière en C, } \theta = \frac{\pi}{2} \\ R = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = mg\left(0 + \frac{2h}{a} - 2\right)$

$\hookrightarrow h = a$

$\begin{cases} \text{M quitte la gouttière en A, } \theta = \pi \\ R = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow h = h_{lim} = \frac{5a}{2}$

$\rightarrow$ M quitte la gouttière entre C et A pour

$$\boxed{a \leqslant h \leqslant \frac{5a}{2}}$$

Dans ce cas $y_{décollage} = z_D = a - a\cos(\theta_{décollage})$

or au décollage $R = 0 \Rightarrow 3\cos(\theta) + \frac{2h}{a} - 2 = 0$

$$\Rightarrow \cos(\theta_{décollage}) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h}{a}\right)$$

donc

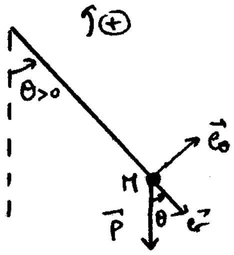
$$z_D = a - a \times \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h}{a}\right) = a - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}h$$

soit

$$\boxed{z_D = \frac{1}{3}(a + 2h)}$$

EXERCICE 8

1. Cas général :



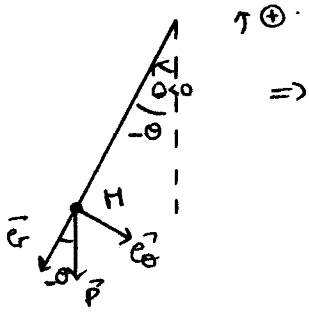
$\delta W(\vec{P}) = \vec{P}.d\vec{OM} = \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dl \\ l d\theta \end{pmatrix}$ or $dl = 0$ (l = cste)

donc $\delta W(\vec{P}) = -mgl\sin(\theta)\,d\theta = -d(-mgl\cos(\theta) + \text{cste})$

or $\delta W(\vec{P}) = -dE_p$ donc

$$\boxed{E_{pp} = -mgl\cos(\theta) + \text{cste}}$$

Remarque : cette démo est valable à droite comme à gauche. En effet, à gauche :



$\Rightarrow \delta W(\vec{P}) = \vec{P}.d\vec{OM} = \begin{pmatrix} +mg\cos(-\theta) \\ +mg\sin(-\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l d\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l d\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_{pp} = -mgl\cos(\theta) + \text{cste}$.

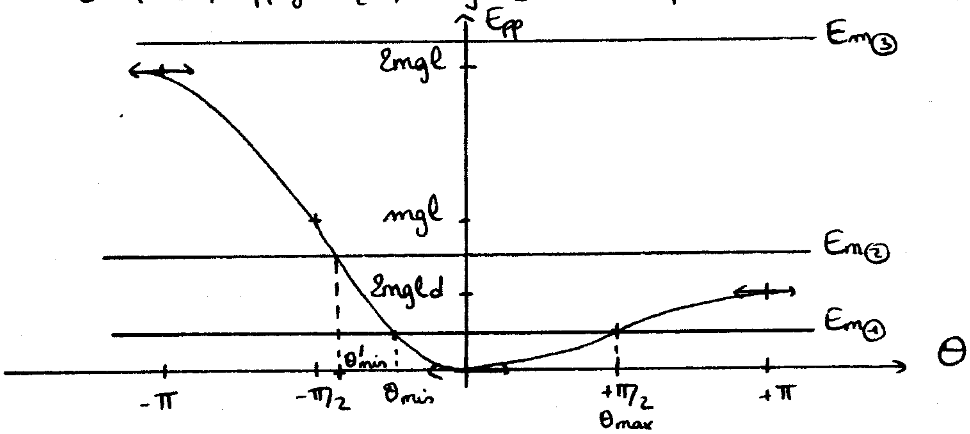
On en déduit : $\begin{cases} E_{ppg} = -mgl\cos(\theta_g) + \text{cste}_1 \\ E_{ppd} = -mgl_d\cos(\theta_d) + \text{cste}_2 \end{cases}$

$E_{ppg}(\theta_g = 0) = 0 \Rightarrow \text{cste}_1 = mgl$ et $E_{ppd}(\theta_d = 0) = 0 \Rightarrow \text{cste}_2 = mgl_d$

et donc

$$\boxed{E_{pp\,g} = mgl(1-\cos(\theta_g)) \text{ et } E_{ppd} = mgl_d(1-\cos(\theta_d))}$$

Lorsque $\theta \in [-\pi, 0]$, $E_{pp\,g} \in [0, 2mgl]$ et lorsque $\theta \in [0, +\pi]$, $E_{pp\,d} \in [0, 2mgl_d]$

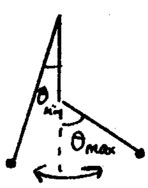


2. $\theta \mapsto E_{pp}(\theta)$ a 3 extrema → "3" positions d'équilibre.

. la position $\theta = \theta_d = \theta_g = 0$ correspond à un minimum d' E_p ⇒ $\underline{\theta_{eq} = 0}$ est donc une <u>position d'équilibre stable</u>.

. les positions $\theta = +\pi$ et $\theta = -\pi$ correspondent à des maxima d'E_p ⇒ $\theta_{eq} = \pm\pi$ sont des <u>positions d'equilibre instables</u>.

3. Cas ① $E_{m①} < 2mgl_d$: mouvement borné, $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$



→ mouvement pendulaire

Cas ② $2mgl_d < Em_② < 2mgl$, alors $\theta \in [\theta'_{min}, +\infty[$

$\Rightarrow$ le pendule va rebrousser chemin en $\theta = \theta'_{min}$ mais rien ne limite son mouvement du côté droit. Le pendule va donc tourner autour du point K sans s'arrêter avec $\dot\theta > 0$ ↻.

Cas ③ $Em_③ > 2mgl$ alors $\theta \in]-\infty, +\infty[$.

$\Rightarrow$ En pratique, si on l'a lancé vers la gauche, le pendule, après avoir fait un grand tour autour de O, va tourner autour de K sans s'arrêter.
Si on l'a lancé vers la droite, il tourne autour de K sans s'arrêter.

4. A gauche $Em_g = \frac{1}{2} m(l\dot\theta_g)^2 + mgl(1-\cos(\theta_g))$. Or $\vec{P}$ est conservative et $\vec{T}$ ne travaille pas (car $\forall t$ $\vec{T}.\vec{v} = 0$) donc

$$\frac{dEm_g}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2\dot\theta_g\ddot\theta_g + mgl\sin(\theta_g)\dot\theta_g = 0$$

$$\underset{\dot\theta_g \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{\ddot\theta_g + \frac{g}{l}\sin(\theta_g) = 0}$$

5. A droite ($\bar{m}$ méthode que 4.) $\boxed{\ddot\theta_d + \frac{g}{l_d}\sin(\theta_d) = 0}$

et $Em_d = \frac{1}{2}m(l\dot\theta_d)^2 + mgl_d(1-\cos(\theta_d))$

6. "faible amplitude" $\Rightarrow \sin(\theta_g) \sim \theta_g$ et $\sin(\theta_d) \sim \theta_d$

Alors $T = \frac{T_g}{2} + \frac{T_d}{2}$ où $T_g = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ et $T_d = 2\pi\sqrt{\frac{l_d}{g}}$

donc

$$\boxed{T = \pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}} + \sqrt{\frac{l_d}{g}}\right)}$$

7. On a vu qu. 3 que $\theta_{max} > |\theta_{min}|$ donc on sait déjà que le mvt de plus grande amplitude est celui de droite.
Montrons-le :

L'altitude max est atteinte lorsque $E_c = 0$ c-a-d $E_m = E_{pp}$

$\Rightarrow$ $Em_g(E_c = 0) = mgl(1-\cos(\theta_{g\,max}))$
$Em_d(E_c = 0) = mgl_d(1-\cos(\theta_{d\,max}))$

Par conservation de l'Em, $mgl(1-\cos(\theta_{g\,max})) = mgl(1-\cos(\theta_{d\,max}))$

$$\Rightarrow \underbrace{l(1-\cos(\theta_{g\,max}))}_{\text{altitude max à gauche}} = \underbrace{l_d(1-\cos(\theta_{d\,max}))}_{\text{altitude max à droite}} \quad (\text{origine en } \theta = 0)$$

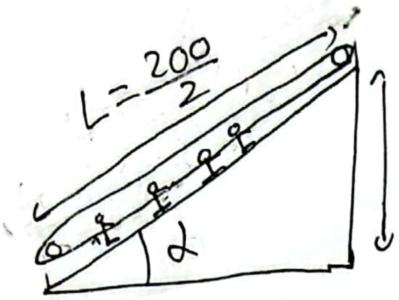
Les altitudes maximales sont identiques.

$l > l_d$ donc $1-\cos(\theta_{g\,max}) < 1-\cos(\theta_{d\,max}) \Rightarrow \cos(\theta_{g\,max}) > \cos(\theta_{d\,max})$

or $\theta_{g,d} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et cos ↘ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\theta_{g\,max} < \theta_{d\,max}}$

Exercice 9

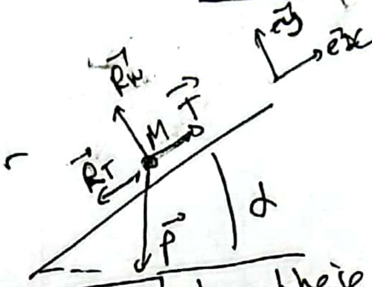
on suppose que la longueur du câble est 2× la longueur de la piste

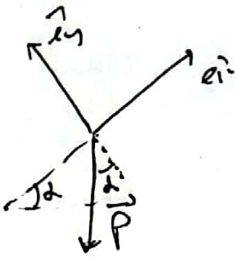


$h = 5\,m$ $\qquad \tan\alpha = \frac{h}{L}$

A.N $\underline{\alpha = 0{,}05\,rad}$

schéma d'un skieur (M)





Bilan des forces sur un skieur de masse $\boxed{m \simeq 70\,Kg}$ ← hypothèse

- force de traction du cable $\vec{T} = T\vec{e_x}$ ← hypothèse
- Réaction normale $\vec{R_N} = R_N\vec{e_y}$
- —— tangentielle $\vec{R_T} = -R_T\vec{e_x}$
- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\vec{e_y} - \sin\alpha\,\vec{e_x})$

Comme la vitesse est constante et le mvt rectiligne

MTRU ⇒ $\underline{\text{les forces se compensent}}$

$$T\vec{e_x} + R_N\vec{e_y} - R_T\vec{e_x} - mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y} = \vec{0}$$

Projectᵒ sur $\vec{e_x}$: $T - R_T - mg\sin\alpha = 0$

sur $\vec{e_y}$ $\quad R_N = mg\cos\alpha$

Colomb ⇒ $R_T = fR_N = fmg\cos\alpha$ $\qquad$ donc $T = R_T + mg\sin\alpha$

$$\boxed{T = mg(f\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

A.N $\underline{T \simeq 56\,N}$

Puissance de $\vec{T}$ pour une vitesse $\vec{v} = V\vec{e_x}$ avec $V = 5\,Km/h = \underline{1{,}4\,m/s}$

$\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T}\cdot\vec{V} \underset{\substack{\vec{T} /\!/ \vec{V} \\ + \text{m̂ sens}}}{=} T \times V$ $\qquad$ A.N $\mathcal{P}(\vec{T}) \simeq 80\,W$

Il y a $\frac{100}{5}$ skieurs sur la piste

distance → entre les skieurs

donc $\boxed{\mathcal{P}_{moteur} = \frac{100}{5} \times \mathcal{P}(\vec{T})}$

A.N $\underline{\mathcal{P}_{moteur} = 1{,}6\,KW}$ ← c'est très faible !