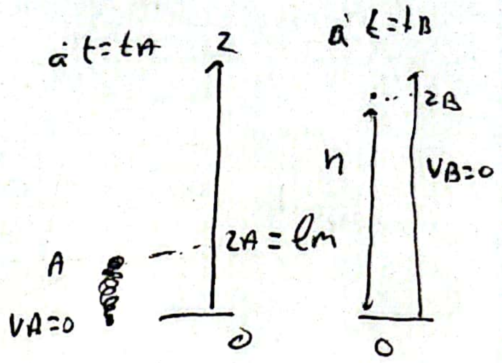
TD 15 Correction

Exercice 2

1] On suppose qu'il n'y a pas de forces non conservatives TEM entre t_A et t_B :

$$\Delta E_m(A\to B) = 0$$



$$\Delta E_{pp}(A\to B) + \Delta E_{pel}(A\to B) + \Delta E_c(A\to B) = 0$$

$$mgz_B - mgz_A + \frac{1}{2}K(\ell_0-\ell_0)^2 - \frac{1}{2}K(\ell_m-\ell_0)^2 + \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = 0$$

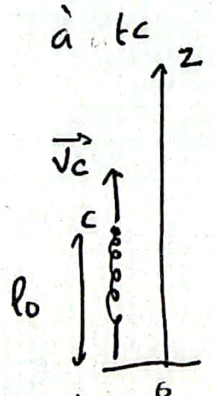
la queue est détendue

$$mgh - \frac{1}{2}K(\ell_m-\ell_0)^2 = 0$$

$$\boxed{K = \frac{2mgh}{(\ell_m-\ell_0)^2}}$$

A.N $K = 4{,}4\,10^3\ N.m^{-1}$

TEM entre t_A et t_C (on peut aussi faire entre C et B)*



$$\Delta E_m(A\to C) = 0 \iff \Delta E_c(A\to C) + \Delta E_{pp}(A\to C) + \Delta E_{pel}(A\to C) = 0$$

$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}m\cancel{V_A^2}^{0} + \underbrace{mgz_C - mgz_A} + \frac{1}{2}K\cancel{(\ell_0-\ell_0)^2}^{0} - \frac{1}{2}K(\ell_m-\ell_0)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}mV_C^2 + mg(\ell_0-\ell_m) - \frac{1}{2}K(\ell_m-\ell_0)^2 = 0$$

$$mV_C^2 = K(\ell_m-\ell_0)^2 - 2mg(\ell_0-\ell_m)$$

$$V_C^2 = \frac{K}{m}(\ell_m-\ell_0)^2 - 2g(\ell_0-\ell_m)$$

$$= \frac{2\cancel{m}gh\cancel{(\ell_m-\ell_0)^2}}{\cancel{m}\cancel{(\ell_m-\ell_0)^2}} - 2g(\ell_0-\ell_m)$$

$$V_C^2 = -2g(\ell_0-\ell_m) + 2gh$$

$$\boxed{V_C = \sqrt{2gh - 2g(\ell_0-\ell_m)}}$$

A.N $V_C = 11{,}7\ m/s$

* autre méthode entre C et B

$$\Delta E_m(C\to B) = 0$$

$$\iff mg\underbrace{(z_B-z_C)}_{h-\ell_0} + \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_C^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}mV_C^2 = mg(h-\ell_0)$$

$$V_C = \sqrt{2g(h-\ell_0)}$$

A.N $V_C = 12{,}5\ m/s$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

1) $\Delta E_{c(A\to B)} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$ ici la seule force est $\vec{P} = m\vec{g}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m \underbrace{v_A^2}_{0 \text{ car sans élan}} = W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = mgh$

finalement $\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$ A.N $v_B = 31,3\ m/s$

$v_B > v_{max} \Rightarrow$ norme pas respectée

2) $\Delta E_{c(A\to B)} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{f})$ $\vec{f}$ étant la force de frottement fluide

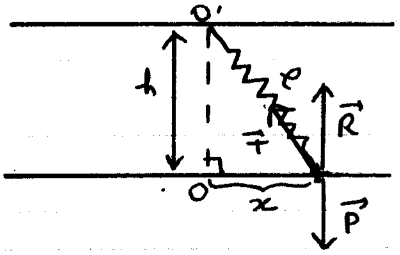
⚠ de norme variable

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m \underbrace{v_A^2}_{0} = mgh + W_{A\to B}(\vec{f})$

$\boxed{W_{A\to B}(\vec{f}) = \frac{1}{2} m v_B^2 - mgh}$ A.N: $W_{A\to B}(\vec{f}) = -13,3\ 10^3\ J$

$W_{A\to B}(\vec{f}) < 0$ car $\vec{f}$ est résistante

EXERCICE 5



1. Système : {anneau} Réf : TSG
BDF : $\vec{T}$, $\vec{P}$, $\vec{R} = \vec{R}_N$ (pas de frottements)

a. Ressort : $E_{p\,el} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + cste$

Rq : ici, pour l'anneau, $z = cste \Rightarrow E_{pp} = cste$
et, $\forall t$, $\vec{R} \perp \vec{v}$ donc $\vec{R}$ ne travaille pas ($\vec{P}$ non plus d'ailleurs ici).

Donc $E_p = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + cste$. que vaut l ici ?

Pythagore : $x^2 + h^2 = l^2$ donc $l = \sqrt{x^2 + h^2}$ et donc

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0\right)^2 + cste}$$

b. On détermine $\frac{dE_p}{dx}$ (et PAS $\frac{dE_p}{dt}$!!!) ⚠

Ici

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} k \left(\sqrt{h^2+x^2} - l_0 \right)^2 \right) = \frac{1}{2} k \times 2 \times \left(\sqrt{h^2+x^2} - l_0 \right) \times \frac{2x}{2\sqrt{h^2+x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dx} = \frac{kx\left(\sqrt{h^2+x^2} - l_0\right)}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

A l'équilibre, $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}} = 0 \iff k x_{eq}\left(\sqrt{h^2+x_{eq}^2} - l_0\right) = 0$

$\iff x_{eq} = 0$ OU $\sqrt{h^2+x_{eq}^2} - l_0 = 0$

$\iff h^2 + x_{eq}^2 = l_0^2$

$\iff x_{eq}^2 = l_0^2 - h^2$ ⚠ n'existe que si $l_0 > h$ (c'est le cas ici)

Donc, 3 positions d'équilibre :

$$\boxed{\begin{aligned} x_{eq} &= 0 \\ x_{eq} &= -\sqrt{l_0^2 - h^2} \\ x_{eq} &= +\sqrt{l_0^2 - h^2} \end{aligned}}$$

c. Stabilité : déterminons le signe de $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$. Si >0 → stable, si <0 → instable.

On avait : $\frac{dE_p}{dx} = kx - \frac{k l_0 x}{\sqrt{h^2+x^2}}$

donc $\frac{d^2E_p}{dx^2} = k - k l_0 \frac{d}{dx}\left(x \times (h^2+x^2)^{-1/2} \right)$

$$= k - k l_0 \left(\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right)(h^2+x^2)^{-3/2} \times 2x \right)$$

donc $$\boxed{\frac{d^2E_p}{dx^2} = k - \frac{k l_0}{\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{k l_0 x^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}}$$

- Pour $x_{eq} = 0$, $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} = k - \frac{k l_0}{h} + 0 = k\left(1 - \frac{l_0}{h}\right) < 0$ car $h < l_0$ ici.

→ $\boxed{x_{eq} = 0 \text{ est INSTABLE}}$ ← $h<l_0$ (logique physiquement).

- Pour $x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2 - h^2}$

alors $$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} = \underbrace{k - \frac{k l_0}{l_0}}_{=0} + \underbrace{\frac{k l_0 x_{eq}^2}{(h^2+x_{eq}^2)^{3/2}}}_{>0}$$

→ $\boxed{x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2 - h^2} \text{ sont STABLES}}$ ← $h<l_0$

2. Dans le cas $h > l_0$, ∃ une seule position d'équilibre $x_{eq} = 0$

et $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}=0} = k\left(1 - \frac{l_0}{h}\right) > 0$ (car $h > l_0$).

donc si $\boxed{h > l_0, \quad x_{eq} = 0 \text{ est STABLE}}$ ← $h>l_0$

Dw 7L

Exercice 6

1) $\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot dx\,\vec{e_x} = -\alpha\vec{v} \cdot dx\,\vec{e_x} = -\alpha\dot{x}\,\vec{e_x} \cdot dx\,\vec{e_x}$

$$\boxed{\delta W(\vec{f}) = -\alpha\dot{x}\,dx}$$

2) $W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_{x_A}^{x_B} \delta W(\vec{f}) = \int_{t_A=0}^{t_B=T} \mathcal{P}(\vec{f})\,dt$

avec $\mathcal{P}(\vec{f}) = \frac{\delta W(\vec{f})}{dt} = -\alpha\dot{x}\frac{dx}{dt} = -\alpha\dot{x}^2 = \underline{-\alpha\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)}$

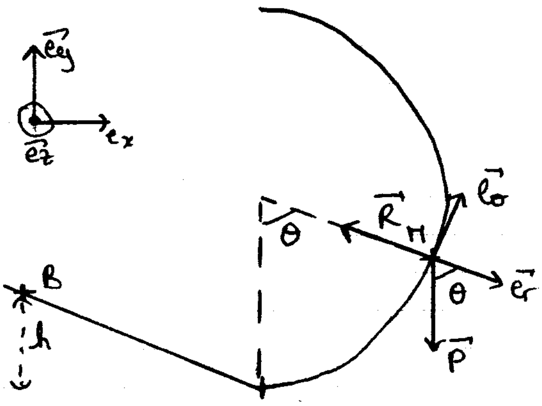
$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_0^T -\alpha\dot{x}^2\,dt = \int_0^T -\alpha\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,dt$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = -\alpha A^2\omega^2\int_0^T \frac{1-\cos(2(\omega t+\varphi))}{2}\,dt = \boxed{-\alpha A^2\omega^2\frac{T}{2}}$$

$[A] = L$, $[T] = T$, $[\alpha] = \frac{[\|\vec{f}\|]}{[\|\vec{v}\|]} = \frac{MLT^{-2}}{L\cdot T^{-1}} = \underline{M\cdot T^{-1}}$, $[\omega] = T^{-1}$

$[W_{A\to B}(\vec{f})] = \underbrace{ML^2\cdot T^{-2}}_{\text{dim énergie}}$ et $\left[\frac{-\alpha A^2\omega^2 T}{2}\right] = M\cdot T^{-1}\times L^2\times(T^{-1})^2\,T = ML^2T^{-2}$ CQFD

EXERCICE 7



1. Même méthode que l'exercice sur l'invit. But ultime : exprimer R en fonction de θ et chercher pour quelle hauteur h R existe toujours $\forall\theta$.

MÉTHODE : ① grâce au PFD on exprime R en fonction de θ et v

② grâce au TEC on exprime v en fonction de θ

③ on en déduit une expression de R en fonction de θ (et éventuellement h, a, etc., ce qui compte c'est qu'il n'y ait plus de $\dot\theta$, v, et toute autre valeur non constante)

④ on cherche h_{min} tq $R(h_{min}) = 0$ lorsque $\theta = +\pi$ (le point aura donc fait tout le tour avant de tomber.

Système : {M, masse m}
Ref : TSG
BDF : $\vec{P}, \vec{R}$
↳ $\vec{P} = mg\cos(\theta)\vec{e_r} - mg\sin(\theta)\vec{e_\theta}$
$\vec{R} = -R\vec{e_r}$

① PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$ avec $\vec{v} = v\vec{e_\theta}$ (car $\dot{r} = 0$)
et donc :
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{a}\vec{e_r} + \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$$

On projette le PFD sur l'axe porté par $\vec{e_r}$:
$$-m\frac{v^2}{a} = mg\cos(\theta) - R \text{ donc } \boxed{R = mg\cos(\theta) + m\frac{v^2}{a}}$$

② On cherche v en fonction de θ (et h, a, etc.)

TEC : $\Delta Ec_{BM} = \Sigma W_{BM}(\vec{F_{ext}})$ avec B le pt de départ de la masse.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{=0 \text{ car } v_{initiale}=0} = W_{BM}(\vec{P}) + \underbrace{W_{BM}(\vec{R})}_{=0 \text{ car } \forall t, \vec{R}\cdot\vec{v} = 0}$$

selon $\vec{e_r}$ selon $\vec{e_\theta}$

→ $\delta W(\vec{R}) = \vec{R}.\vec{v}\,dt = 0$.

De plus, $\Delta W_{BM}(\vec{P}) = mg(y_B - y_M)$ ($\vec{e_y}\uparrow$)

Or, ici, $y_B = h$ et $y_M = a - a\cos(\theta)$ (valable aussi pour $\theta > \frac{\pi}{2}$ car ds ce cas $y_M > a$ comme $\cos\theta$)

donc $W_{BM}(\vec{P}) = mg(h - a + a\cos(\theta))$

et donc $\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - a + a\cos(\theta))$

donc
$$\boxed{\frac{mv^2}{a} = \frac{2mg}{a}(h - a + a\cos(\theta))}$$

③ or $R = mg\cos(\theta) + m\frac{v^2}{a}$ donc $R = mg\cos(\theta) + \frac{2mg}{a}(h - a + a\cos(\theta))$

soit
$$\boxed{R = mg\left(3\cos(\theta) + \frac{2h}{a} - 2\right)} \text{ homogène}$$

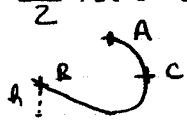
④ On remarque que $R\downarrow$ qd $\theta\nearrow$, sa valeur étant minimale en A (logique!).

la masse effectue un looping si R (au pt A) $\neq 0$. Or, en A, $\theta = +\pi$, et donc $\cos(\theta) = -1$.

$R \geq 0$ pour $\cos(\theta) = -1$ donc $mg\left(3\times(-1) + \frac{2h}{a} - 2\right) \geq 0$

$\Rightarrow \quad -5 + \frac{2h}{a} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h \geq \frac{5a}{2} = h_{lim}}$

On doit lâcher M d'une hauteur au moins égale à $\frac{5a}{2}$ si on veut que M fasse un tour complet du cercle.



2. M ne peut quitter la gouttière qu'entre C et A.
Cas limites :

$\begin{cases} \text{M quitte la gouttière en C}, \ \theta = \frac{\pi}{2} \\ R = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = mg\left(0 + \frac{2h}{a} - 2\right)$

$\hookrightarrow h = a$

$\begin{cases} \text{M quitte la gouttière en A}, \ \theta = \pi \\ R = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow h = h_{lim} = \frac{5a}{2}$

$\rightarrow$ M quitte la gouttière entre C et A pour

$$\boxed{a \leq h \leq \frac{5a}{2}}$$

Dans ce cas $y_{décollage} = z_D = a - a\cos(\theta_{décollage})$

or au decollage $R = 0 \Rightarrow 3\cos(\theta) + \frac{2h}{a} - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad \cos(\theta_{décollage}) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h}{a}\right)$

donc

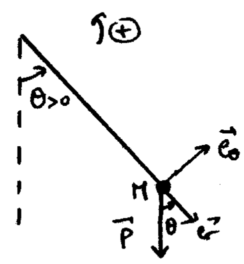
$$z_D = a - a \times \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h}{a}\right) = a - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}h$$

soit

$$\boxed{z_D = \frac{1}{3}(a + 2h)}$$

EXERCICE 8

1. Cas général :



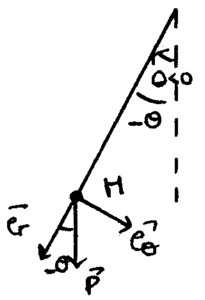
$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P}\cdot d\vec{OM} = \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dl \\ l d\theta \end{pmatrix}$$ or $dl = 0$ ($l = cste$)

donc $\delta W(\vec{P}) = -mgl\sin(\theta)\,d\theta = -d(-mgl\cos(\theta) + cste)$

or $\delta W(\vec{P}) = -dE_p$ donc

$$\boxed{E_{pp} = -mgl\cos(\theta) + cste}$$

Remarque : cette démo est valable à droite comme à gauche. En effet, à gauche :



$$\Rightarrow \delta W(\vec{P}) = \vec{P}\cdot d\vec{OM} = \begin{pmatrix} +mg\cos(-\theta) \\ +mg\sin(-\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l d\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l d\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{pp} = -mgl\cos(\theta) + cste.$$

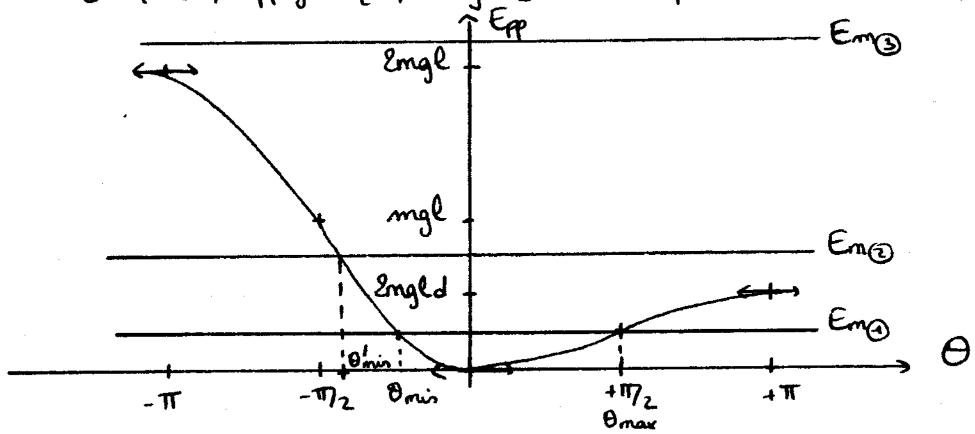
On en déduit : $\begin{cases} E_{ppg} = -mgl\cos(\theta_g) + cste_1 \\ E_{ppd} = -mgl_d\cos(\theta_d) + cste_2 \end{cases}$

$E_{ppg}(\theta_g = 0) = 0 \Rightarrow cste_1 = mgl$ et $E_{ppd}(\theta_d = 0) = 0 \Rightarrow cste_2 = mgl_d$

et donc

$$\boxed{E_{pp\,g} = mgl(1-\cos(\theta_g)) \text{ et } E_{ppd} = mgl_d(1-\cos(\theta_d))}$$

Lorsque $\theta \in [-\pi, 0]$, $E_{pp\,g} \in [0, 2mgl]$ et lorsque $\theta \in [0, +\pi]$, $E_{pp\,d} \in [0, 2mgl_d]$

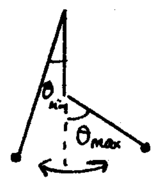


2. $\theta \mapsto E_{pp}(\theta)$ a 3 extrema → "3" positions d'équilibre.

. la position $\theta = \theta_d = \theta_g = 0$ correspond à un minimum d' E_p ⇒ $\underline{\theta_{eq} = 0}$ est donc une <u>position d'équilibre stable</u>.

. les positions $\theta = +\pi$ et $\theta = -\pi$ correspondent à des maxima d'E_p ⇒ $\theta_{eq} = \pm\pi$ sont des <u>positions d'équilibre instables</u>.

3. Cas ① $Em_{①} < 2mgl_d$: mouvement borné, $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$



→ mouvement pendulaire

Cas ② $2mgl_d < E_{m②} < 2mgl$, alors $\theta \in [\theta'_{min}, +\infty[$

$\Rightarrow$ le pendule va rebrousser chemin en $\theta = \theta'_{min}$ mais rien ne limite son mouvement du côté droit. Le pendule va donc tourner autour du point K sans s'arrêter avec $\dot\theta > 0$ ↻.

Cas ③ $E_{m③} > 2mgl$ alors $\theta \in]-\infty, +\infty[$.

$\Rightarrow$ En pratique, si on l'a lancé vers la gauche, le pendule, après avoir fait un grand tour autour de O, va tourner autour de K sans s'arrêter.
Si on l'a lancé vers la droite, il tourne autour de K sans s'arrêter.

4. A gauche $E_{mg} = \frac{1}{2} m (l\dot\theta_g)^2 + mgl(1-\cos(\theta_g))$. Or $\vec P$ est conservative et $\vec T$ ne travaille pas (car $\forall t$ $\vec T \cdot \vec v = 0$) donc

$$\frac{dE_{mg}}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2 \dot\theta_g \ddot\theta_g + mgl \sin(\theta_g)\dot\theta_g = 0$$

$$\underset{\dot\theta_g \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{\ddot\theta_g + \frac{g}{l}\sin(\theta_g) = 0}$$

5. A droite ($\bar m$ méthode que 4.) $\boxed{\ddot\theta_d + \frac{g}{l_d}\sin(\theta_d) = 0}$

et $E_{md} = \frac{1}{2} m (l\dot\theta_d)^2 + mgl_d(1-\cos(\theta_d))$

6. "faible amplitude" $\Rightarrow \sin(\theta_g) \sim \theta_g$ et $\sin(\theta_d) \sim \theta_d$

Alors $T = \frac{T_g}{2} + \frac{T_d}{2}$ où $T_g = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ et $T_d = 2\pi\sqrt{\frac{l_d}{g}}$

donc

$$\boxed{T = \pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}} + \sqrt{\frac{l_d}{g}}\right)}$$

7. On a vu qu. 3 que $\theta_{max} > |\theta_{min}|$ donc on sait déjà que le mvt de plus grande amplitude est celui de droite.
Montrons-le :

L'altitude max est atteinte lorsque $E_c = 0$ c-a-d $E_m = E_{pp}$.

$\Rightarrow$ $E_{mg}(E_c = 0) = mgl\ (1-\cos(\theta_{g\,max}))$
$E_{md}(E_c = 0) = mgl_d(1-\cos(\theta_{d\,max}))$

Par conservation de l'Em, $mgl(1-\cos(\theta_{g\,max})) = mgl(1-\cos(\theta_{d\,max}))$

$$\Rightarrow \underbrace{l(1-\cos(\theta_{g\,max}))}_{\text{altitude max à gauche}} = \underbrace{l_d(1-\cos(\theta_{d\,max}))}_{\text{altitude max à droite}} \quad (\text{origine en } \theta = 0)$$

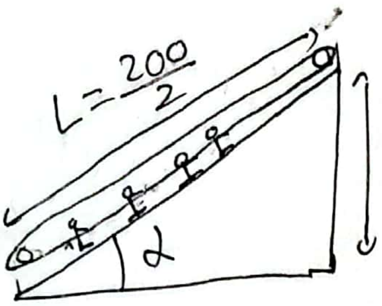
Les altitudes maximales sont identiques.

$l > l_d$ donc $1-\cos(\theta_{g\,max}) < 1-\cos(\theta_{d\,max}) \Rightarrow \cos(\theta_{g\,max}) > \cos(\theta_{d\,max})$

or $\theta_{g,d} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et cos ↘ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\theta_{g\,max} < \theta_{d\,max}}$

Exercice 9

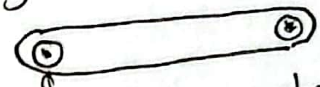
on suppose que la longueur du câble est 2× la longueur de la piste



$h = 5m$

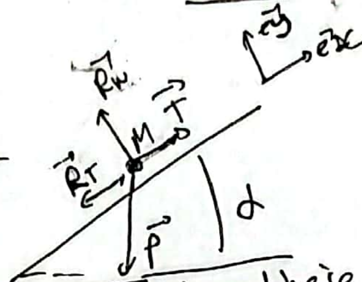
$\tan\alpha = \frac{h}{L}$

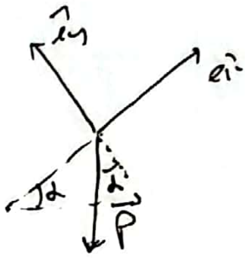
A.N $\alpha = 0,05 \text{ rad}$



moteur sur un arbre qui entraine une poulie

schéma d'un skieur (M)





Bilan des forces sur un skieur de masse $m \simeq 70 Kg$ ← hypothèse

- force de traction du câble $\vec{T} = T\vec{e_x}$ ← hypothèse
- Réaction normale $\vec{R_N} = R_N\vec{e_y}$
- —— tangentielle $\vec{R_T} = -R_T\vec{e_x}$
- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\vec{e_y} + \sin\alpha\,\vec{e_x})$

Comme la vitesse est constante et le mvt rectiligne

MTRU ⇒ les forces se compensent

$$T\vec{e_x} + R_N\vec{e_y} - R_T\vec{e_x} + mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y} = \vec{0}$$

Projecto sur $\vec{e_x}$: $T - R_T + mg\sin\alpha = 0$

sur $\vec{e_y}$: $R_N = mg\cos\alpha$

Coulomb ⇒ $R_T = f R_N = f mg\cos\alpha$ donc $T = R_T - mg\sin\alpha$

$$\boxed{T = mg(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

A.N $T \simeq 56 \text{ N}$

Puissance de $\vec{T}$ pour une vitesse $\vec{v} = V\vec{e_x}$ avec $V = 5 Km/h = 1,4 m/s$

$\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T}\cdot\vec{v} \underset{\substack{\vec{T} // \vec{v} \\ + \text{ m̂ sens}}}{=} T \times v$ A.N $\mathcal{P}(\vec{T}) \simeq 80 W$

Il y a $\frac{100}{5}$ skieurs sur la piste   donc $\boxed{\mathcal{P}_{moteur} = \frac{100}{5} \times \mathcal{P}(\vec{T})}$

distance → entre les skieurs

A.N $\mathcal{P}_{moteur} = 1,6 KW$ ← c'est très faible!