Semestre A - Partie 2 : Mécanique 1

CHAP. 16 : MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGÉES

Objectifs :

- Evaluer les ordres de grandeur des forces électrique et magnétique, et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
- Savoir d'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
- Mettre en équation le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Citer une application.
- Effectuer un bilan énergétique pour calculer la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- Mouvement circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où $\vec{v}_0$est perpendiculaire à $\vec{B}$. Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire. Citer une application.

I Force de Lorentz

1.1 Expression

Crée par des charges électriques en mouvement

Crée par des charges électriques fixes

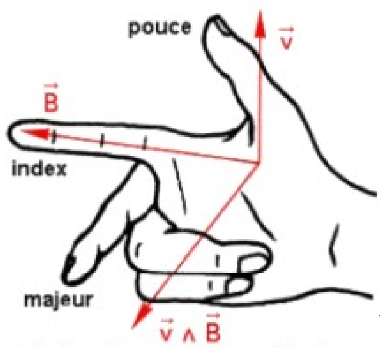
En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$, toute particule de charge q et de masse m et ayant une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel Rg subit une force appelée force de Lorentz telle que :

$$\vec{F}_{lorentz} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\vec{F}_e = q\vec{E}$ est la partie électrique de la force de Lorentz

$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est la partie magnétique de la force de Lorentz

On peut déterminer la direction et le sens de $\vec{F}_{mag}$ en utilisant la règle de la main droite



Règle des 3 doigts ***de la main droite***

si on place le pouce de la main droite dans la direction et le sens du produit $q\vec{v}$
si on place l'indexe de la main droite dans le sens et la direction de $\vec{B}$
Alors le majeur de la main droite indique le sens et la direction de la force magnétique $\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

1.2 Ordres de grandeur

a Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Unités : $\vec{E}$ s'exprime en V/m $\vec{B}$ s'exprime en Tesla

Champ électrique	
10^{-6} V/m	champ créé par un proton à une distance de 1 mm
10^{3} V/m	champ entre 2 plaques distantes de 1 cm et soumises à 10 V
10^{6} V/m	champ disruptif de l'air, pour lequel un éclair peut se propager
50 V/m	**Réfrigérateur, téléviseur**
Champ magnétique	
10^{-5} T	champ magnétique terrestre
0,1 T	aimant usuel
1,25 T	Aimant au néodyme de la taille d'une pièce de monnaie (peut soulever un objet de 9 kg et effacer les informations d'une carte de crédit)
10 T à 100 T	électro-aimant

b Forces électrique et magnétique

force magnétique

charge d'un électron : -e= -1,6 10^{-19} C ,

vitesse non relativiste classique dans un accélérateur de particule v= 10^{7} m /s

avec un aimant usuel de 0,1 T : $||\vec{F}_{mag}||=10^{-15}\,N$

Force électrique

Force électrique que subit un électron dans le champ disruptif de l'air : $||\vec{F}_{elec}||=|e|\times||\vec{E}||\approx 10^{-13}\,N$

Force électrique que subit un électrons entre deux plaques distantes de 1cm soumises à 10 V : $||\vec{F}_{elec}||=|e|\times||\vec{E}||\approx 10^{-16}\,N$

c Comparaison aux forces gravitationnelles

Pour un proton de charge q=1,6 10^{-19} C, de vitesse v = 10^{7} m/s de masse m = 1,7 10^{-27}kg subissant un champ magnétique de norme B= 0,1 T et un champ électrique de norme E=1000 V/m

Poids : $P=mg\approx 10^{-27}\times 10\approx 10^{-26}\,N$

Force magnétique $F_{mag}=||q\vec{v}\wedge\vec{B}||\approx 10^{-19}\times 10^{7}\times 0{,}1\approx 10^{-13}\,N$

Force électrique $F_{el}=||q\vec{E}||\approx 10^{-19}\times 10^{3}\approx 10^{-16}\,N$

Conclusion

Pour des champs d'amplitude courantes, le poids est négligeable devant la force de Lorentz
En pratique , dans le bilan des forces on ne le prendra pas en compte

1.3 Approche énergétique

a) Travail de la force magnétique

$\vec{F}_{maq}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$ Puissance développée par cette force $P(\vec{F}_{maq})=\vec{F}_{maq}\cdot\vec{v}=(q\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}$

Or par définition du produit vectoriel $\vec{F}_{maq}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{v}$. Or comme le produit scalaire entre un vecteur orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est forcement nul on en déduit $\boldsymbol{P(\vec{F}_{maq})=\vec{F}_{maq}\cdot\vec{v}=0}$

et on sait que $\boldsymbol{\delta W(\vec{F}_{maq})=P(\vec{F}_{mag})\,dt=0}$ conclusion :

La force magnétique ne travail pas !

En appliquant le TEC sur une particule subissant seulement $\vec{F}_{mag}$ on aurait $\Delta E_c=0$. conclusion :

la force magnétique ne permet pas d'augmenter la vitesse d'une particule (elle peut seulement la dévier)

(attention F_{mag} peut être responsable d'une accélération, mais cette accélération aura pour conséquence de courber la trajectoire, pas d'augmenter la norme du vecteur vitesse)

b) Travail de la force électrique

la force électrique $\vec{F}_{el}=q\vec{E}$ elle travaille tant que le champ électrique n'est pas orthogonal au vecteur vitesse ,

le champ électrique peut donc augmenter la norme de la vitesse des particules : c'est le principe des accélérateurs de particule linéaires

II Etude du mouvement d'une particule chargée

2.1 Dans un champ électrostatique uniforme

a Mise en équation

un considère un champ : électrostatique, c'est à dire indépendant du temps

uniforme, c'est à dire que $\vec{E}(M)$ est indépendant du point M de l'espace considéré autrement dit le champ électrique possède en tout point la même norme et la même direction en tout point

$\boldsymbol{\vec{E}(M)=E\,\vec{e}_x}$ (le vecteur $\vec{e}_x$ est fixe, on aurait pu l'appeler différemment)

On se place en coordonnées cartésiennes .

Système : {charge q de masse m ponctuelle} référentiel : TSG

Bilan des forces : seulement la force électrique $\vec{F}_{el}=q\vec{E}=qE_0\vec{e}_x$ (poids négligé)

PFD appliqué au système : $\boldsymbol{m\vec{a}=\vec{F}_{el}\Leftrightarrow\vec{a}=\frac{q}{m}\vec{E}=c\vec{s}te}$

On reconnaît un mouvement uniformément accélérée(comme chute libre)

On en déduit par primitive $\boldsymbol{\vec{v}=\frac{q}{m}\vec{E}t+\vec{v}_0}$ $\boldsymbol{\vec{v}_0}$ étant le vecteur vitesse initiale

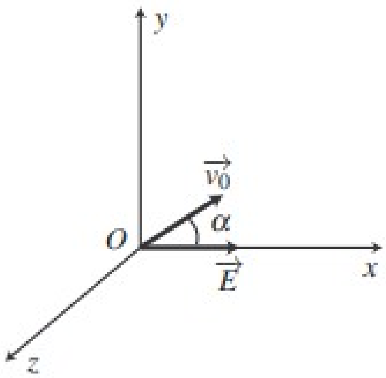
et c $\boldsymbol{\vec{OM}(t)=\frac{q}{2m}\vec{E}t^2+\vec{v}_0t+\vec{OM}_0}$ vec OM_0 étant le vecteur position initiale,

On peut arbitrairement choisir l'origine comme position initiale M_0 = O et on a alors

$$\boldsymbol{\vec{OM}(t)=\frac{q}{2m}\vec{E}t^2+\vec{v}_0t}$$

Rmq : le mouvement s'effectuer dans le plan contenant le vecteur $\vec{v}_0$ et le champ électrique $\vec{E}$

comme on peut arbitrairement choisir $\vec{E}=E\,\vec{e}_x$ on peut choisir arbitrairement l'ace Oy (ou Oz) pour que le vecteur $\vec{v}_0$ soit dans le plan (Oxy) (respectivemet Oxz)



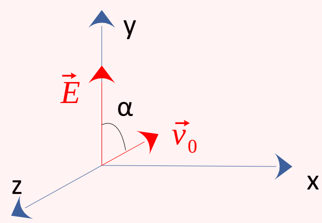
on choisit arbitrairement l'angle α ente $\vec{v}_0$ et l'axe Ox

si on choisit le plan Oxy, On a alors les équations horaires

$$\vec{OM}(t)=\begin{cases} x(t)=\dfrac{qE}{2m}\times t^2+v_0\times\cos(\alpha)\times t \\ y(t)=v_0\sin(\alpha)\times t \\ z(t)=0 \end{cases}$$

Rmq : si on avait choisit $\vec{E}=E\,\vec{e}_y$ et l 'angle α ente $\vec{v}_0$ et l'axe Oy on obtient plutôt

$$\vec{OM}(t)=\begin{cases} x(t)=v_0\sin(\alpha)\times t \\ y(t)=\dfrac{qE}{2m}\times t^2+v_0\times\cos(\alpha)\times t \\ z(t)=0 \end{cases}$$



b Étude de la trajectoire

comme z(t) = 0 le mouvement s'effectue dans le plan contenant le vecteur $\vec{v}_0$ et le champ électrique $\vec{E}$

cas particulier : si $\vec{v}_0=\vec{0}$ ou si $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{E}$:

α vaut 0 ou π et cos(α) 1 ou -1

$$\vec{OM}(t)=\begin{cases} x(t)=\dfrac{qE}{2m}\times t^2+v_0\times\cos(\alpha)\times t \\ y(t)=0 \\ z(t)=0 \end{cases}$$

le mouvement est rectiligne uniformément accéléré

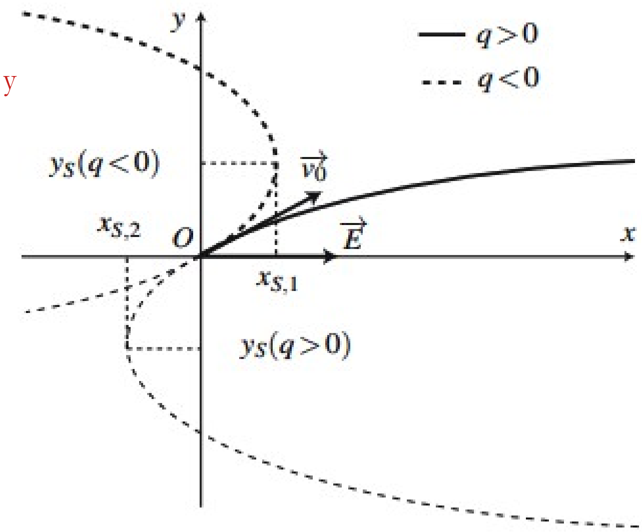
cas général: *si $\vec{E}$ est selon $\vec{e}_x$*

on va chercher une équation de parabole sous la forme x=f(y) on isole t :

$$t=\frac{y}{v_0\sin(\alpha)} \Rightarrow \boxed{x(y)=\frac{qE}{2m}\times\frac{y^2}{v_0^2\sin^2\alpha}+\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\times y}$$

allure :
(par rapport à une parabole classique x joue le rôle de y et y joue le rôle de x)

animation



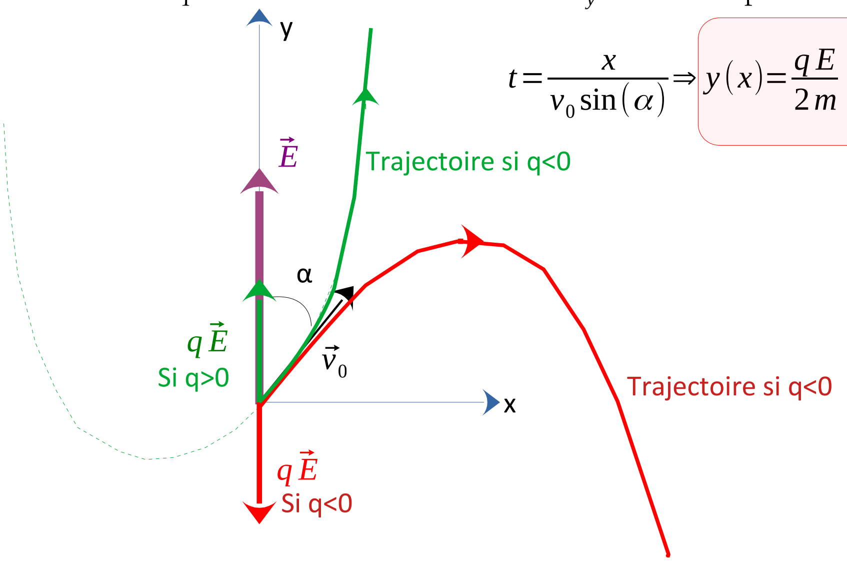
Rappel math :
les branches pointes vers le haut (sens x croissant) si $\dfrac{\frac{qE}{2m}}{v_0^2\sin^2\alpha}$ est positif.
comme ici E>0 , il faut forcement q>0

Les branches pointes vers le bas (sens x décroissant) si q<0

$\boxed{\text{la concavité de la parabole est tournée dans le sens de } q\vec{E}}$

Remarque si on avait eu $\vec{E}$ selon $\vec{e}_y$ on aurait plutôt cherché à exprimer y en fonction de x et on aurait eu

$$t=\frac{x}{v_0\sin(\alpha)} \Rightarrow \boxed{y(x)=\frac{qE}{2m}\times\frac{x^2}{v_0^2\sin^2\alpha}+cotan(\alpha)\times x}$$



c Approche énergétique

Énergie potentielle électrostatique

$\vec{F}_{el}=q\vec{E}=qE\vec{e}_x$

pour $d\vec{OM}=dx\,\vec{e}_x+dy\,\vec{e}_y+dz\,\vec{e}_z$

on a le travail élémentaire $\delta W(\vec{F}_{el})=q\vec{E}\cdot d\vec{OM}=qE\,dx$ qui dépend seulement de x et pas du chemin suivi

$\vec{F}_{el}$ est donc une force conservative et peut donc s'écrire à une dimension comme $\vec{F}_{el}=\frac{-dE_{p,elec}}{dx}\vec{e}_x$ par identification $qE=\frac{-dE_{p,elec}}{dx}$ donc en primitivant par rapport à x

On trouve l'énergie potentielle électrostatique : $\boxed{E_{p,elec}(x)=-qEx+cste}$

potentiel électrostatique

On définit le potentiel électrostatique V(x) (ou potentiel électrique dans le cas variable au cours du temps) par la relation ;

$$E_{p,elec}(x)=qV(x)$$

On déduit de l'équation précédente $V(x)=-Ex+k$ avec k une constante

(vrai dans un champ électrostatique uniforme)

Rmq : V(x) est définit à une constante près

Rmq 2 : V(x) s'exprime en volt

Rmq 3 : une différence de potentiel entre deux points est appelée **tension électrique (souvent notée U)**

Rmq 4 : **Le champ électrique est toujours dirigé vers les potentiels décroissants.**

En effet :

- si E > 0, V(x) est une fonction décroissante de x et le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des x croissants ;
- si E < 0, V(x) est une fonction croissante de x et le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des x décroissant

Lien avec l'énergie cinétique

La seule force étant la force électrique qui est conservative, le théorème de l'énergie mécanique implique la conservation de l'énergie mécanique d'où

$$\Delta E_m=\Delta E_c+\Delta E_{p,elec}=0$$

si la particule passe d'un point A d'abscisse x_A à un point B d'abscisse x_B

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2+qV(x_b)-qV(x_A)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=-q\left(V(x_B)-V(x_A)\right)$$

$$\boxed{\Delta E_c=-q\Delta V \quad \text{avec} \quad \Delta V = V(x_f) - V(x_i)}$$

Pour faire varier l'énergie cinétique et donc la norme de la vitesse d'une particule chargée soumise uniquement à une force électromagnétique, il faut lui faire franchir une différence de potentiel ΔV.

Si q > 0, la particule sera accélérée par une différence de potentielle ΔV < 0 et freinée par une différence de potentielle ΔV > 0.

Si q < 0, la particule sera accélérée par une différence de potentielle ΔV > 0 et freinée par une différence de potentielle ΔV < 0

Si la vitesse initiale est nulle, q >0 et $V(x_A) > V(X_B)$ en posant U = - ΔV on obtient la vitesse finale

$$v_B=\sqrt{2\frac{q}{m}U}$$

<u>Une nouvelle unité d'énergie adaptée : l'électron-volt</u>

La formule $\Delta E_c=-q\Delta V$ montre que le produit d'une charge par une différence de potentiel est homogène à une énergie.

On définit l'électron-volt comme le produit de la charge de l'électron e par le volt.

1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J.

Interprétation physique : Un électron ou un proton initialement au repos et accéléré sous une tension de 1 V acquiert une énergie cinétique de 1 eV.

Odg :
L'énergie cinétique finale d'un électron initialement au repos et accéléré par une tension accélératrice de 2 kV vaut **2 keV**. Sa vitesse est alors de $2{,}7.10^{7}$ $m\cdot s^{-1}$ soit environ 10 % de la vitesse de la lumière. Une telle différence de potentiel est relativement aisée à réaliser, on peut donc facilement obtenir des électrons relativistes. Dans ce cours, on se limite à des tensions accélératrices inférieures ou égales à 2 kV pour les applications numériques concernant des électrons afin de rester dans l'approximation classique.

2.2 Dans un champ magnétostatique uniforme

a <u>Mise en équation</u>

on choisit un champ magnétique stationnaire et uniforme arbitrairement dirigé selon la direction Oz :
$\vec{B}=B_0\vec{e}_z$
On se place en coordonnées cartésiennes (ou cylindriques)
Système : {charge q de masse M ponctuelle} référentiel : TSG
Bilan des forces : seulement la force magnétique $\vec{F}_{mag}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$ (poids négligé)

On suppose que le vecteur vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique

Donc par exemple $\vec{v}_0$ est selon $\pm\vec{e}_x$ ou $\pm\vec{e}_y$: Arbitrairement ici on choisit $\vec{v}_0=\pm v_0\vec{e}_y$

On peut montre que mouvement est uniforme (vecteur vitesse de norme constante $\|\vec{v}\|=cste=\|\vec{v}_0\|$)
Preuve : TEC entre deux points A et B appliqué au système avec $\vec{F}_{mag}$ qui ne travaille pas $\rightarrow \Delta E_{C(A\rightarrow B)}=0$

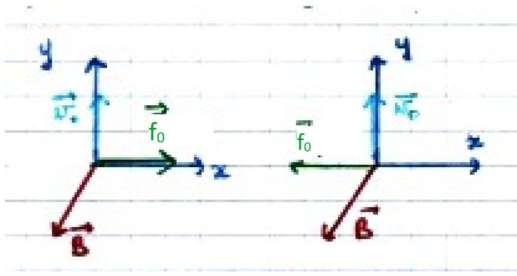
Attention cela **ne veut pas dire que** $\vec{v}=\vec{v}_0\,\forall t$ (la direction du vecteur peut varier)

Exprimons plus précisément la force magnétique **initiale** $\vec{f}_0=\vec{F}_{mag}=q\vec{v}\wedge\vec{B}=q\,v_0\vec{e}_y\wedge B_0\vec{e}_z$

$\vec{f}_0=\vec{F}_{mag}=qv_0B_0\vec{e}_x$ son sens dépend du signe de q et du sens de $\vec{v}_0$

attention comme la direction de $\vec{v}$ change, la force magnétique n'est pas toujours dirigé selon $\vec{e}_x$

La trajectoire est déviée vers la droite Si q>0



La trajectoire est déviée vers la gauche si q<0

b Caractérisation du mouvement, Rayon de la trajectoire

On admet que la trajectoire est en réalité circulaire de rayon R

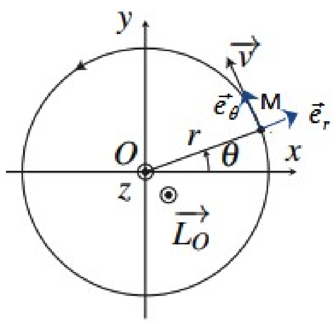
On se place donc dans la base polaire

$$\vec{a}=\underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta}_{\text{Accélération tangentielle } \vec{a}_T}+\underbrace{-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r}_{\text{Accélération centripète } \vec{a}_N}$$

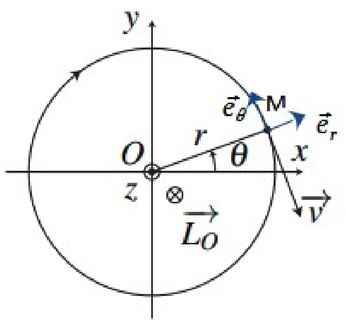
Or le mouvement est uniforme donc l'accélération tangentielle est nulle $\frac{dv}{dt}=0$

Ainsi : $$\vec{a}=\frac{-v^2}{R}\vec{e}_r=\frac{-v_0^2}{R}\vec{e}_r$$

avec $\vec{v}=\pm v_0\vec{e}_\theta$ +- car on ne sait pas le sens du mouvement !



si $\vec{v}=+v_0\vec{e}_\theta$ particule tourne dans le sens trigo



si $\vec{v}=-v_0\vec{e}_\theta$ particule tourne dans le sens horaire

D'après le PFD $m\vec{a}=\vec{F}_{mag}$ avec ici la direction de $\vec{v}$ (et donc de $\vec{F}_{mag}$) qui change au cours du temps mais

De façon générale $\vec{F}_{mag}=q\vec{v}\wedge\vec{B}=q(\pm v_0\vec{e}_\theta)\wedge B_0\vec{e}_z$ (or $\vec{e}_\theta\wedge\vec{e}_z=\vec{e}_r$)

Par identification on en déduit que $\vec{F}_{mag}=\pm q v_0 B_0\vec{e}_r$

le PFD donne $m\vec{a}=\vec{F}_{mag}\Leftrightarrow -m\dfrac{v_0^2}{R}\vec{e}_r=q(\pm v_0)B_0\vec{e}_r$

par projection sur $\vec{e}_r$: $-m\dfrac{v_0^2}{R}\vec{e}_r=q(\pm v_0)B_0\Rightarrow\dfrac{mv_0}{R}=\pm qB_0\Leftrightarrow R=\dfrac{mv_0}{\pm qB_0}$

avec v_0 , m , R , B_0 des grandeur positives

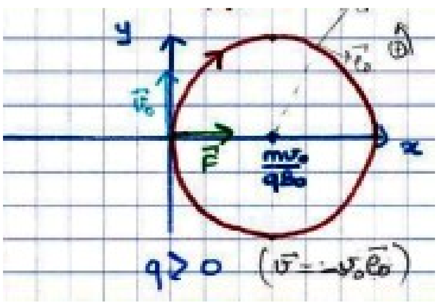
On garde la solution + quand q>0 , c'est le cas où $\vec{v}=+v_0\vec{e}_\theta$ et la particule tourne dans le sens trigo
On garde la solution – quand q<0 (-q >0) c'est le cas où $\vec{v}=-v_0\vec{e}_\theta$ et la particule tourne dans le sens horaire

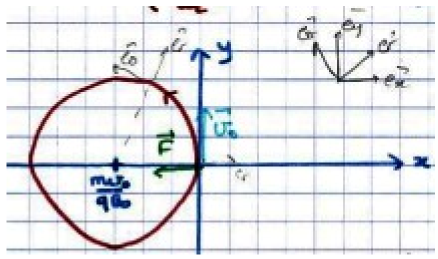
De manière plus générale le rayon de la trajectoire est donnée par :

$$\boldsymbol{R=\frac{m v_0}{|q| B_0}}$$

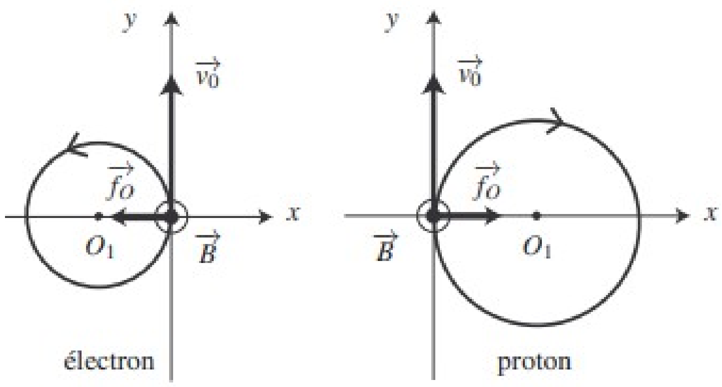
(à savoir retrouver)

Plus B_0 augmente, plus le champ est intense et plus le rayon de courbure est faible
Plus v_0 est important plus le rayon de courbure est faible





animation



$\vec{f}_0$ étant la force de Lorentz initiale

Rmq : **la direction de la force de Lorentz initiale donne le sens d'enroulement de la trajectoire**

c) Pulsation cyclotron :

La dimension de |q|B / m est celle d'une pulsation car :

$$[Q \times v \times B] = [F] \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{Q \times B}{M}\right] = \left[\frac{F}{M \times v}\right] = \left[\frac{F}{M \times a \times T}\right] = \left[\frac{F}{F \times T}\right] = [T^{-1}]$$

à retenir

Une particule de charge q et de vitesse initiale $\vec{v}_0$ perpendiculaire à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ suit un mouvement circulaire et uniforme à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega_c = \frac{|qB_0|}{m}}$ appelée p**ulsation cyclotron.**

On trouve le rayon de la trajectoire grâce à la relation **$v_0 = R\omega_c$.**

Remarque : Lorsque la vitesse initiale n'est pas perpendiculaire au champ magnétique, le mouvement est hélicoïdal

Odg

On considère Un proton possédant la vitesse $v_0 = 6{,}2.10^5$ m·s^{-1} et un électron la vitesse $v_0 = 2{,}7.10^7$ m·s^{-1}. Lorsqu'on les soumet à un champ magnétique de 0,10 T, ces particules de charge |q| = e = 1,6.10^{-19} C suivent des trajectoires circulaires de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{eB} = \frac{1{,}67.10^{-27} \times 6{,}2.10^5}{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}10} = 6{,}5 \text{ cm pour le proton de masse } m_p = 1{,}67.10^{-27} \text{ kg}$$

$$= \frac{9{,}1.10^{-31} \times 2{,}7.10^7}{1.6.10^{-19} \times 0.10} = 1{,}5 \text{ mm pour l'électron de masse } m_e = 9{,}1.10^{-31} \text{ kg.}$$

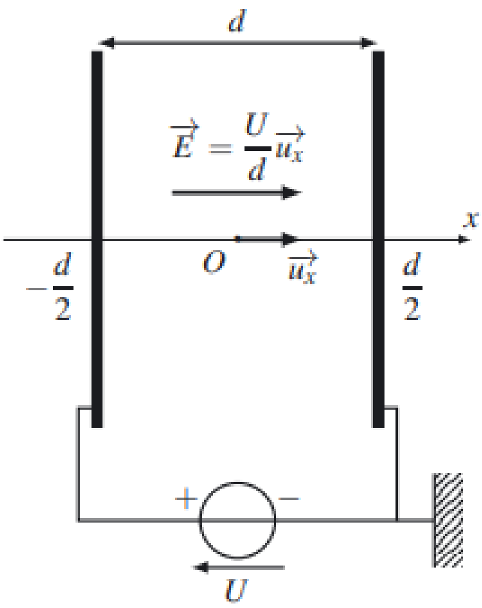
$$\omega_c = \frac{eB}{m} = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}10}{1{,}67.10^{-27}} = 9{,}5.10^6 \text{ rad·s}^{-1} \text{ pour le proton}$$

$$= \frac{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}10}{9{,}1.10^{-31}} = 1{,}8.10^{10} \text{ rad·s}^{-1} \text{ pour l'électron.}$$

III Application aux accélérateurs de particules

3.1 Les accélérateurs linéaires

a Champ électrique entre deux électrodes planes



On applique une différence de potentielle entre les deux électrodes

On admet (sera démontrer en deuxième année) que le champ est uniforme entre les deux plaques et dirigé selon $\vec{u}_x$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$$

Lien avec la différence de potentiel U

Le potentiel électrique V(x) entre les deux électrodes a pour expression

V(x) = - E_0 x + k (1)

Or on sait que U = V(x=-d/2) – V(x=d/2)

d'après 1 V(x=d/2) = - E_0 d/2+ k et V(x=-d/2) = - E_0 (-d/2)+ k = E_0 d/2 + k

en combinant les deux $U = V(x=-d/2) - V(x=d/2) \Leftrightarrow U = E_0 d/2 + k - (-E_0 d/2 + k) \Leftrightarrow \boxed{E_0 = \frac{U}{d}}$

Ainsi V(x) = - U/d x + k (1)

Rmq : $\vec{E}$ est bien dans le sens des potentiels décroissants

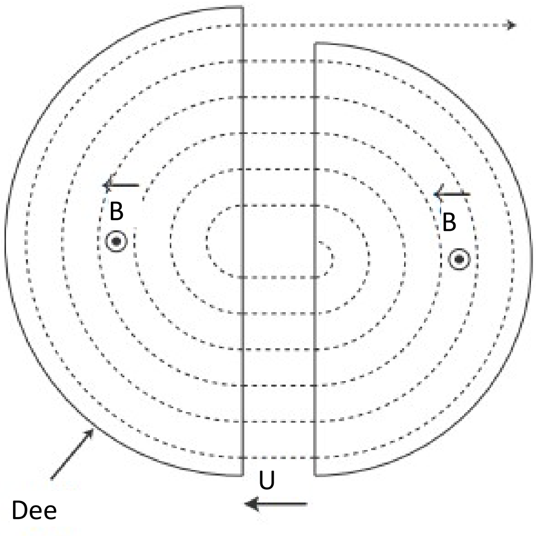
b Application

L'accélérateur linéaire le plus puissance du monde est à Stanford, il mesure 3,2 km et il communique une énergie max de 50 GeV aux protons ce qui les rend très largement relativiste

3.2 Les accélérateurs circulaires : exemple du cyclotron

a Principe

voir poly et animation



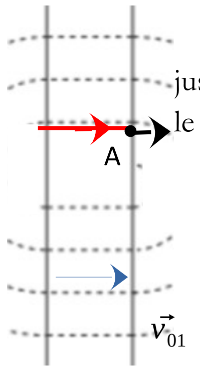
Chaque dee est soumis à un champ magnétique uniforme, le sens du champ magnétique est le même dans les deux dees. Les deux dees sont séparés par un espace dans lequel on applique une différence de potentiel U (donc un champ électrique est présent)

On suppose la vitesse initiale nulle
Nature du mouvement
entre les dees : rectiligne uniformément accélérée

$$\vec{v}(t)=\frac{q}{m}\vec{E}(t)\times t$$

Dans les dees : mouvement circulaire de rayon $R_i=\frac{m\,v_{0i}}{|q|B_0}$

v_{0i} étant la vitesse après le $i_{ème}$ passage au milieu des Dee

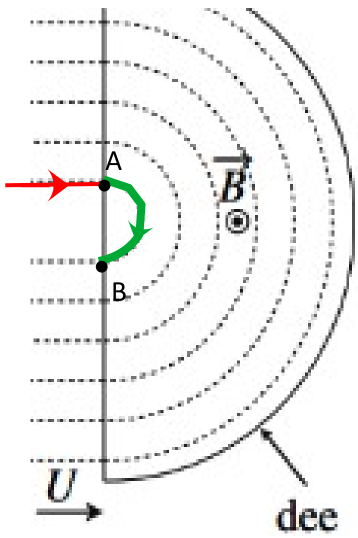


Étape 1 : **mvt uniformément accéléré** selon $+\vec{e}_x$

jusqu'à ce que la particule rentre dans le dee avec **la vitesse v_{01}**

Vitesse v_{01} en A

$$v_{01}=\sqrt{2\frac{q}{m}U}$$

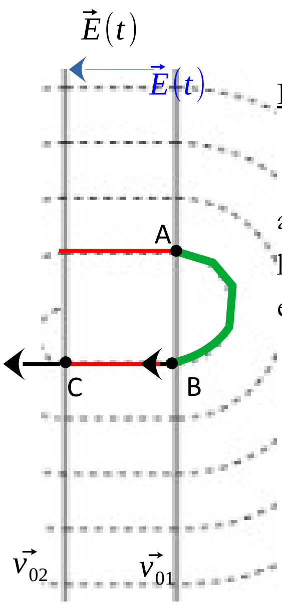


Étape 2 :
Mouvement **circulaire uniforme** de A vers B à la vitesse v_{01}
Le rayon de la trajectoires est

$$R_1=\frac{m\,v_{01}}{|q|B_0}$$

Et la pulsation (vitesse angulaire)

$$\omega_c=\frac{|qB_0|}{m}$$



Étape 3 :

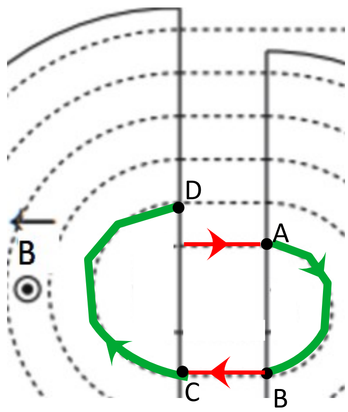
Mouvement rectiligne uniformément accéléré selon $-\vec{e}_x$
le champ électrique a changé de sens
en C la particule **atteint la vitesse v_{02}**

$$v_{02}=\sqrt{2}\sqrt{2\frac{q}{m}U}$$

Étape 4 :
Mouvement circulaire uniforme de C vers D à la vitesse v_{02}
Le rayon de la trajectoires est

$$R_2=\frac{m\,v_{02}}{|q|B_0}$$

Et la pulsation (vitesse angulaire)



$$\omega_c=\frac{|qB_0|}{m}$$

Les étapes se répètent avec des vitesses et des rayons de plus en plus grands (mais la pulsation reste toujours la même)

$$\omega_c = \frac{|qB_0|}{m}$$

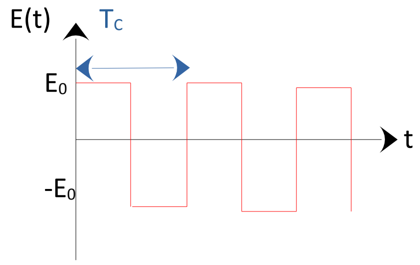
b Champ $\vec{E} = E(t)\vec{e}_x$ entre les « dees »

Le champ $\vec{E}$ doit changer de sens périodiquement

La durée passée dans les Dee est toujours la même. En effet la pulsation est ω_c , la période (durée pour faire un tour complet)est $T_C = \frac{2\pi}{\omega_c}$. La durée passée dans un dee (pour faire un demi tour) est donc

T = $\frac{T_C}{2} = \frac{\pi}{\omega_c}$ (on néglige la durée passée dans la zone d'accélération)

Ainsi la valeur algébrique E(t) du champ électrique est périodique de période T_c et de fréquence $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{|q| B_0}{2\pi m}$



c Limites

La vitesse maximale possible est $v_{max} = \omega_c R_{max}$

Odg : Pour le cyclotron de University of Michigan, Ann Arbor (près de Detroit), le champ magnétique vaut B = 0,10 T et le diamètre des dees est de 2,1 m.

$$f_c = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}10}{2\pi \times 1{,}67.10^{-27}} = 1{,}5 \text{ MHz.}$$

$$v_{max} = R_{max}\omega = 2\pi \times 1{,}05 \times 1{,}5.10^6 = 1{,}0.10^7 \text{ m·s}^{-1}.$$

Cette accélérateur peut atteindre au maximum 1,5 T mais on est alors dans le cadre relativiste (la vitesse qu'on obtiendrait pas nos calculs serait plus grande que la vitesse de la lumière dans le vide ce qui est impossible)

Pour atteindre une telle vitesse à l'aide d'un seul champ électrique dans un accélérateur linéaire, il faudrait une différence de potentiel de :

$$U = \frac{mv^2}{2|q|} = \frac{1{,}67.10^{-27} \times (10^7)^2}{2 \times 1{,}6.10^{-19}} = 5{,}3.10^5 \text{ V.}$$

ce qui est énorme et demanderait beaucoup plus d'énergie !