PCSI – Physique

Devoir surveillé n°5

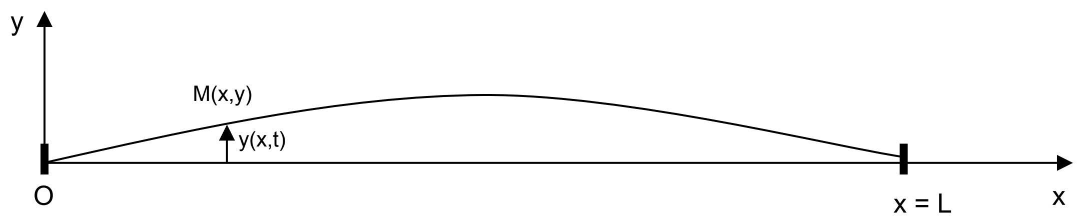
Durée : 2 h
La calculatrice **est autorisée.**
Le sujet comporte 8 pages et 3 problèmes indépendants.
Le poids de chaque problème dans le barème total est indiqué en % dans son titre.

Problème 1 : Cordes vibrantes (35 %)

Donnée :

$$\sin a \,.\, \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

On fixe une corde tendue de longueur L à ses deux extrémités. On l'écarte de sa position d'équilibre afin de la faire vibrer librement.



On note $y(x,t)$ l'écart de la corde par rapport à sa position d'équilibre en un point M d'abscisse x. On envisage d'étudier l'onde sous la forme :

$$y(x,t) = A\sin(\omega t)\sin(kx)$$

avec A une constante homogène à une longueur, ω la pulsation et k le vecteur d'onde. On note c la célérité des ondes progressives sur cette corde.

I. Étude de l'onde

1) Quel est le nom du type d'onde envisagé ? Qu'appelle-t-on nœud, ventre, lorsqu'on envisage une telle onde ?

2) Quelle est la dimension du vecteur d'onde k ?

3) Donner sans démonstration la relation liant c, k et ω ? En déduire une relation entre la longueur d'onde λ de la vibration, sa fréquence f et sa célérité c.

4) On appelle mode fondamental, le mode tel qu'il n'y a que deux nœuds situés aux extrémités de la corde lorsqu'elle vibre. À partir d'un raisonnement graphique (et non d'un calcul), exprimer successivement la longueur d'onde λ_1 puis la fréquence du mode fondamental f_1 en fonction de L et c.

5) On définit l'harmonique de rang n comme le mode de vibration de la corde tel qu'il y ait $(n+1)$ nœuds : les deux nœuds extrêmes, plus n-1 nœuds intermédiaires. Représenter successivement la corde à un instant t_0 quelconque lorsqu'on excite ses harmoniques de rang n=2, puis n=3, puis n=4. Sur chaque graphique on fera apparaître la longueur d'onde λ_n.

6) En se servant de l'étude précédente, exprimer λ_2, λ_3, λ_4, f_2, f_3 et f_4 en fonction de L et c.

7) En déduire les expressions de λ_n, f_n et k_n pour n quelconque.

8) En notant $y_n(x,t)=A\sin(\omega_n t)\sin(k_n x)$ la vibration correspondant au mode propre n, justifier par un calcul la position des nœuds dans le mode n=3.

9) Montrer que les ondes envisagées peuvent aussi être décomposées sous la forme $y(x,t)=A'\cos(\omega t-kx)+B'\cos(\omega t+kx)$ en précisant A' et B'.

10) Interpréter physiquement cette écriture.

II. Guitare

Dans une guitare "classique" la longueur L est fixée et on essaie d'avoir la même tension sur chaque corde.

11) On peut montrer que $c=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où T est la force de tension de la corde et μ sa masse linéique. Vérifier l'homogénéité de la formule.

12) Expliquer pourquoi deux cordes émettent des notes différentes lorsqu'elles vibrent entre leurs extrémités.

13) On veut changer de note sur une même corde, pour cela on pose ses doigts sur des barrettes afin de raccourcir la partie vibrante de la corde. On veut produire des fréquences ν_p telles que $\frac{\nu_p}{f_1}=2^{\frac{p}{12}}$ (gamme chromatique) avec f_1 fréquence fondamentale de la corde à vide et p entier positif non nul. Sur la guitare la longueur d'une corde est L = 66,5 cm. Donner la position de la 12ème barrette.

Problème 2 : La sonde Juno (33 %)

Notations et valeurs numériques

Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Masses molaires (en g·mol^{-1})	$\mathcal{M}_{\mathrm{H}} = 1,0$; $\mathcal{M}_{\mathrm{He}} = 4,0$; $\mathcal{M}_{\mathrm{Ge}} = 72,6$
Numéros atomiques	$Z(O) = 8$ et $Z(S) = 16$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1}
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}
Accélération de la pesanteur terrestre	$g = 9,8$ m·s^{-2}
Pouvoir de résolution de l'œil	$\varepsilon_{\text{œil}} = 1,5'$
Conversion	$1° = 60'$ (minutes d'angle)
Masse de la Terre	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg
Masse de Jupiter	$M_J = 1,97 \cdot 10^{27}$ kg
Rayon de la Terre	$R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km
Rayon de Jupiter	$R_J = 7,0 \cdot 10^4$ km
Rayon de l'orbite terrestre	$d_T = 1,50 \cdot 10^8$ km
Rayon de l'orbite de Jupiter	$d_J = 7,80 \cdot 10^8$ km
Période de révolution sidérale de la Terre	$T_T = 365,25$ jours

Jupiter est la planète la plus volumineuse du système solaire et fait partie des planètes « géantes gazeuses ». Compte tenu du rôle central de la planète géante dans la formation du système solaire, celle-ci intrigue toujours les scientifiques puisque de nombreuses questions concernant sa formation restent sans réponse. En particulier, deux scénarios s'affrontent sur la manière dont la planète Jupiter s'est constituée :

• premier scénario : la planète s'est formée en deux temps - accrétion des matériaux situés dans son voisinage jusqu'à former un noyau solide représentant une dizaine de masses terrestres puis effondrement gravitationnel de la masse de gaz et de poussière entourant la planète ;

• second scénario : celui-ci repose sur le seul effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz et de poussières mais nécessite la présence d'une nébuleuse originelle de plus grande taille que celle retenue dans les scénarios de formation du système solaire.

La sonde Juno a pour objectif principal de résoudre ce dilemme en collectant des données permettant de reconstituer l'histoire de la formation de la planète géante et son évolution.

I - Observer Jupiter depuis la Terre

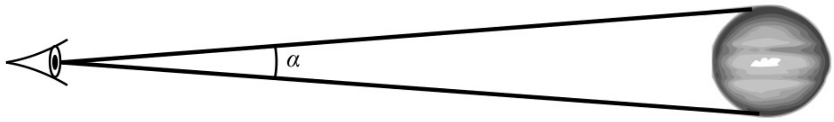
C'est en janvier 1610, à l'aide d'une très modeste lunette astronomique, que Galilée se rendit compte de la présence de quatre points lumineux à proximité de la planète géante. En notant soigneusement leurs positions, plusieurs soirs de suite, il s'aperçut que ces quatre points étaient mobiles et comprit qu'ils tournaient autour de la planète. Galilée venait de découvrir les quatre satellites principaux de Jupiter.

Le tableau ci-dessous regroupe certaines données concernant ces satellites dont les orbites sont quasi circulaires :

Satellite	Distance moyenne au centre de Jupiter	Période de révolution sidérale
Io	$4,218 \cdot 10^5$ km	1,769 jour
Europe	$6,714 \cdot 10^5$ km	3,551 jours
Ganymède	$1,070 \cdot 10^6$ km	7,155 jours
Callisto	$1,883 \cdot 10^6$ km	16,689 jours

1. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas d'une orbite circulaire, puis estimer la masse de Jupiter en utilisant les données. Comparer cette valeur à celle fournie dans le sujet (pour la suite des calculs on utilisera la valeur donnée dans le sujet).

2. Calculer la masse volumique moyenne de cette planète.
Pour un observateur terrestre, Jupiter est vue sous un angle α qui varie suivant la distance Terre-Jupiter. Les orbites de la Terre et de Jupiter sont assimilées à des cercles ayant pour centre le Soleil, contenus dans un même plan, de rayons respectifs d_T et d_J et décrits dans le même sens.
La planète Jupiter est modélisée en première approximation par une sphère de rayon R_J .



3. Calculer l'angle maximal α_{max} (en radians) sous lequel Jupiter est vue depuis la Terre.
4. Cette situation est la plus favorable à l'observation et porte le nom d'opposition de Jupiter. À l'aide des données fournies, évaluer la période de révolution sidérale T_J de Jupiter.

Une lunette astronomique est un système optique centré constitué d'un objectif et d'un oculaire.
L'objectif est assimilé à une lentille mince convergente de centre optique O_1 , de distance focale $f'_1 = 100$ cm et de diamètre D_1. L'oculaire est une lentille mince convergente de centre optique O_2, de distance focale $f'_2 = 10$ cm et de diamètre D_2.

Figure 1: Lunette astronomique

L'objectif donne d'un objet éloigné une image réelle appelée image objective. Cette dernière est observée au moyen de l'oculaire.

5. À quelle condition l'œil d'un observateur, supposé sans défaut, n'accommode-t-il pas (ne se fatigue pas) ? En déduire la position relative de l'objectif et de l'oculaire dans ce cas de figure. Ce système optique possède-t-il des foyers ? Comment se nomme un tel système optique ?
6. Rappeler les conditions de Gauss. Reproduire la figure 1, sans respecter les échelles, et compléter la marche du rayon incident d'angle α avec l'axe optique en faisant clairement apparaître les traits de construction. Indiquer l'angle α' sous lequel est vue la planète à travers l'instrument sous ces mêmes conditions.
7. Déterminer le grossissement de la lunette $G=\frac{\alpha'}{\alpha}$ en fonction de f'_1 et de f'_2 et calculer celui-ci. Jupiter pourra-t-elle être discernée correctement avec une telle lunette ?

<u>II - La trajectoire de la sonde Juno</u>
<u>II.1 S'échapper de la Terre</u>

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère. Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de novembre 2025.
Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le "lancer" vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_ℓ est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géo-centrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il "s'échappe".
8. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre) et l'instant final (M à l'infini), déterminer la vitesse de libération v_ℓ . Calculer numériquement v_ℓ

Problème 3 : La marche à pied (33 %)

I.1 - Marcher en montagne

Tout le monde en a fait l'expérience : marcher en montée est plus fatigant que marcher à plat. Le randonneur est un système articulé complexe dont l'étude dépasse le cadre de ce sujet. Nous nous contenterons ici de réfléchir aux différentes contributions énergétiques mises en jeu lorsqu'il se déplace.

On considère un randonneur de masse m, de centre d'inertie I, en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

L'accélération de la pesanteur, notée $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$, est supposée uniforme.

Le randonneur se déplace d'un point A situé en bas d'une colline à un point B situé en haut de la colline comme indiqué sur la **figure 1**.

On note h le dénivelé parcouru par le randonneur $h = z_B - z_A$: où z_A est la coordonnée du point A selon l'axe $(O, \overrightarrow{e_z})$ et z_B celle du point B.

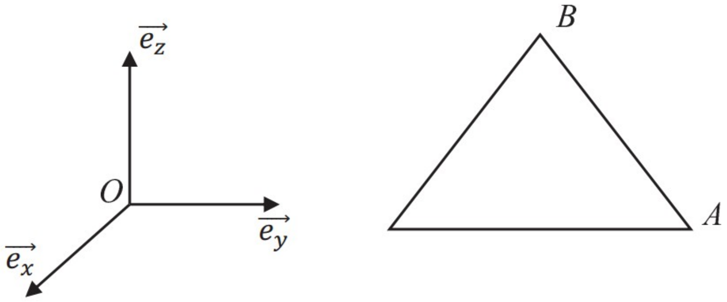


Figure 1 - Colline et base cartésienne

Les frottements de l'air sur le randonneur seront négligés.

Q1. Lorsqu'il marche, le randonneur est soumis à la réaction $\vec{R}$ du sol sur ses pieds. La réaction du sol s'applique à chaque instant en un point de vitesse nulle (le point d'appui du pied). On assimile le pied à un point matériel. Que vaut la puissance de la réaction du sol sur le pied ? Justifier.

On cherche la variation d'énergie mécanique du randonneur. Pour cela, on assimile le randonneur à un point matériel placé en I de coordonnées (x_I, y_I, z_I).

Q2. Le randonneur est soumis à son poids. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p du randonneur en fonction de m, g, z_I et d'une constante. Cette énergie potentielle est la seule prise en compte dans notre étude.

Q3. À l'instant initial, le randonneur est en A et a une vitesse nulle. Il s'arrête à l'arrivée en B pour contempler le paysage. Que vaut la variation de son énergie cinétique entre A et B ?

Q4. Rappeler la définition de l'énergie mécanique. Déterminer la variation d'énergie mécanique ΔE_m du randonneur entre A et B en fonction de m, g et h.

Q5. Lors d'une randonnée, un individu de 60 kg parcourt une distance de 7 km avec un dénivelé de 1 km. L'accélération de la pesanteur est approximée à 10 m·s^{-2}. Calculer numériquement la variation de son énergie mécanique.

Q6. Calculer à nouveau la variation d'énergie mécanique pour une distance parcourue de 10 km sans dénivelé. Comparer les deux résultats précédents en s'appuyant sur le début de l'introduction de la **sous-partie I.1**.

L'énergie nécessaire à l'ascension du randonneur est apportée par les muscles (assimiler le randonneur à un point matériel n'est ici plus possible : on doit tenir compte des actions intérieures et du travail associé). Lors d'une journée « normale », sans randonnée, un individu consomme E_n = 12 MJ en moyenne (pour maintenir sa température à 37 °C, respirer, bouger, réfléchir …).

Q7. Quel est le pourcentage d'énergie dépensée en plus par l'individu lors de l'ascension décrite à la question **Q5** par rapport à une journée « normale » ? Commenter sachant qu'une randonnée avec un dénivelé de 1 km dure en moyenne trois heures.

Cette énergie lui est apportée par ce qu'il mange : un joule ingurgité est supposé apporter un joule d'énergie pour le métabolisme de l'individu.

Q8. Combien de joules le randonneur doit-il ingurgiter le jour de son ascension pour compenser les dépenses totales de son organisme ? On attend une valeur numérique.

I.3 - Marcher à son rythme pour aller loin

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour permettre le déplacement.

On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillations d'une jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

On assimile la jambe à un solide <u>rigide</u> de masse m_o et de longueur d en rotation autour d'un axe horizontal $(O, \overrightarrow{e_x})$ fixe dans le référentiel d'étude. $(O, \overrightarrow{e_x})$ passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la **figure 2**, page 5). La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$ est noté J. On néglige tout frottement. On note H le centre d'inertie de la jambe situé à la distance d' de O. La jambe ne touche pas le sol dans cette étude. γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH).

L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -\,g\,\overrightarrow{e_z}$ et supposée uniforme.