DS n°07 - CORRIGÉ

PROBLÈME I : Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Partie A - Les aurores polaires (Centrale Supélec MP 2016)

A.1. Les collisions des particules chargées avec les molécules présentes dans l'air provoquent l'excitation des molécules de l'atmosphère (N_2, O_2 principalement) qui se désexcitent ensuite en émettant un rayonnement dans le visible.

A.2. Déterminons $\frac{\|\vec{F}_{mag}\|}{\|\vec{P}\|}$. On a $\vec{F}_{mag} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ et $\vec{P} = m\vec{g}$

donc $\frac{\|\vec{F}_{mag}\|}{\|\vec{P}\|} \simeq \frac{qvB_0}{mg}$. Prenons : $\begin{cases} m \simeq 10^{-30}\ kg \\ g \simeq 10\ m.s^{-2} \\ q \simeq 10^{-19}\ C \\ v \simeq 10^{7}\ m.s^{-1} \\ B \simeq 5.10^{-5}\ T \end{cases}$

Rq : on prend $v \simeq 10^7\ m.s^{-1}$ car $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 1\ keV \simeq 10^{16}\ J$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \Rightarrow v \simeq \sqrt{\frac{10^{16}}{10^{-30}}} \simeq \sqrt{10^{+14}} \simeq 10^7\ m.s^{-1}$.

On en déduit $\frac{\|\vec{F}_{mag}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{10^{-19}\times 10^{7}\times 5.10^{-5}}{10^{-30}\times 10} = 5.10^{-17+30-1} = 5.10^{12} \gg 1$

donc $\boxed{\|\vec{F}_{mag}\| \gg \|\vec{P}\|}$, on peut négliger le poids devant la force magnétique.

A.3. Système : {$\bar{e}$ de masse m et de charge $-e$} Ref : $\mathcal{R}_g$ BDF : $\vec{F}_{mag} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

or $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ donc $\vec{F} = \vec{0}$ à $t=0$.
La trajectoire sera rectiligne et le mouvement sera uniforme à la vitesse v_0.

A.4.1. Système : {$\bar{e}$ de masse m et de charge $-e$} Ref : $\mathcal{R}_g$ BDF $\vec{F}_{mag} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

PFD : $m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\B_0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B_0 \\ m\ddot{y} = +e\dot{x}B_0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{eB_0}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = +\frac{eB_0}{m}\dot{x} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_c\dot{y} \\ \ddot{y} = +\omega_c\dot{x} \end{cases} \text{ avec } \omega_c = \frac{eB_0}{m}}$

Rq : $[\omega_c] = \left[\frac{eB_0}{m}\right] = \frac{[evB_0]}{[mv]} = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-1}} = T^{-1} \rightarrow$ ok.

ODG : $\omega_c = \frac{10^{-19}\times 5.10^{-5}}{10^{-30}} \simeq 5.10^{-19-5+30}$ $\Rightarrow$ $\underline{\omega_c \simeq 5.10^{+6}\ rad.s^{-1}}$

A.4.2. D'après A.4.1. $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_c\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = +\omega_c\dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$

(3) $\Rightarrow \dot{z} = cste = \dot{z}_0 = 0 \Rightarrow z = cste = z_0 \Rightarrow$ le mouvement est plan.

Posons $\underline{u} = x + iy$ alors $\dot{\underline{u}} = \dot{x} + i\dot{y}$ et $\ddot{\underline{u}} = \ddot{x} + i\ddot{y}$

$(1) + i(2) \Rightarrow \quad \ddot{\underline{u}} = -\omega_c \dot{y} + i\omega_c \dot{x} = i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y})$

$\Rightarrow \quad \ddot{\underline{u}} = i\omega_c \dot{\underline{u}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\underline{u}} - i\omega_c \dot{\underline{u}} = 0$

donc $\quad \dot{\underline{u}} = A \exp(+i\omega_c t)$

or $\dot{\underline{u}}(0) = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0 = v_0$ donc $\dot{\underline{u}} = v_0 \exp(+i\omega_c t)$

on intègre : $\quad \underline{u} = -i\dfrac{v_0}{\omega_c}\exp(+i\omega_c t) + \text{cste}$ $\quad$ or $\underline{u}_0 = 0$

donc $\quad 0 = -i\dfrac{v_0}{\omega_c} + \text{cste} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = \dfrac{iv_0}{\omega_c}\left(1 - \exp(+i\omega_c t)\right)$

donc $\quad x + iy = \dfrac{iv_0}{\omega_c} - \dfrac{iv_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + \dfrac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$

donc

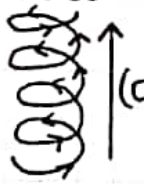
$$\begin{cases} x(t) = Re(\underline{u}) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \\ y(t) = Im(\underline{u}) = \dfrac{v_0}{\omega_c} - \dfrac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) \end{cases}$$

et donc $\quad x^2 + \left(y - \dfrac{v_0}{\omega_c}\right)^2 = \left(\dfrac{v_0}{\omega_c}\right)^2$

de la forme $\boxed{(x-0)^2 + (y-y_0)^2 = R_c^2}$ $\rightarrow$ equation cartésienne d'un cercle de centre $(0, y_0)$ et de rayon R_c.

On en deduit $\boxed{R_c = \left|\dfrac{v_0}{\omega_c}\right| = \dfrac{mv_0}{eB_0}}$

A.5. Il y a superposition des deux mouvements étudiés en A.3. et A.4. (rectiligne uniforme selon (Oz) et circulaire uniforme dans (xOy).
$\Rightarrow$ le mouvement est hélicoïdal.



(Oz)

Scanné avec CamScanner

Partie B - Principe du cyclotron

B.1. Système : {proton de masse m, de charge e dans le Dee}
Réf : TSG
BDF : $\vec{F}_{mag} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

$\delta W(\vec{F}_{mag}) = \mathcal{P}(\vec{F}_{mag})\,dt = q(\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}\,dt = 0 \quad \forall t$.

donc $W_{AB}(\vec{F}_{mag}) = 0 \quad \forall(A,B)$

D'après le TEC, $\Delta E_{c_{A\to B}} = 0 \quad \forall(A,B) \Rightarrow v_A = v_B \quad \forall(A,B)$.

Donc le <u>mouvement est uniforme</u>.

B.2. Voir annexe (à rendre avec la copie). Rq : $\|\vec{v}_2\| > \|\vec{v}_1\|$, $\|\vec{F}_2\| > \|\vec{F}_1\|$.

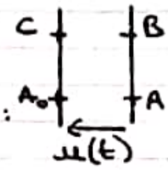
B.3. $v_0 = \frac{\text{distance parcourue dans le dee}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{\pi}{v_0}\frac{mv}{eB}$

donc $\boxed{\Delta t = \frac{\pi m}{eB} = \frac{\pi}{\omega_c}}$ indépendant de la vitesse du proton.

B.4.1. quand le proton décrit A_0A_1 il faut $\vec{E}$ de A_0 vers A_1 car on veut que le proton soit accéléré et donc comme $\vec{F} = e\vec{E}$ il faut $\vec{E}$ vers A_1.
De même, de B à C, il faut $\vec{E}$ vers C.

$A_0 \xrightarrow[\vec{E}]{} A \qquad\qquad C \xleftarrow[\vec{E}]{} B$

$\vec{E}$ est <u>toujours selon les potentiels décroissants</u>.

Donc il faut $V_A < V_{A_0}$ et $V_C < V_B$. Or on a : 

donc $\begin{cases} u = V_{A_0} - V_A \\ u = V_C - V_B \end{cases}$

il faut donc $\boxed{u > 0 \text{ sur } A_0A \text{ et } u < 0 \text{ sur } BC}$

B.4.2. Voir annexe.

B.4.3. On lit sur le schéma 2 : $T = \frac{1}{f} = 2\Delta t$ donc $f = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{\omega_c}{2\pi}$

donc $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\frac{eB}{m}}$

B.5. $\Delta E_c = -e\Delta V = +e|u| \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - 0 = +e|u| \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{\frac{2e|u|}{m}}}$

De même $\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = +e|u|$ avec $v_B = v_A$

donc $v_C = \sqrt{v_A^2 + \frac{2e|u|}{m}} \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{\frac{4e|u|}{m}}} = v_{1\,tour}$.

B.6. On peut généraliser B.5 et on obtient $v_{N\,tour} = \sqrt{\frac{4Ne|u|}{m}}$

or ici $E_{c\,max} = \frac{1}{2}mv_{N\,tour}^2 = \frac{1}{2}m\frac{4Ne|u|}{m} = 2Ne|u|$

donc $\boxed{N = \frac{E_{c\,max}}{2e|u|}}$ A.N. $N = \frac{200.10^6.10^{-19}}{2.10^{-19}.100.10^3} \Rightarrow \underline{N = 10^3 \text{ tours}}$

De même, $R_{max} = \frac{mv_{max}}{eB} = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2E_{c\,max}}{m}} \Rightarrow R_{max} = \frac{\sqrt{2mE_{c\,max}}}{eB}$

A.N. $R_{max} = \frac{(2.10^{-27}\times 200.10^6\times 10^{-19})^{1/2}}{10^{-19}\times 1} \simeq \frac{2.10^{\frac{-27+8-19}{2}}}{10^{-19}} \simeq \underline{2\,m}$ → cohérent !

Code Candidat : CORRIGÉ DS 7

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

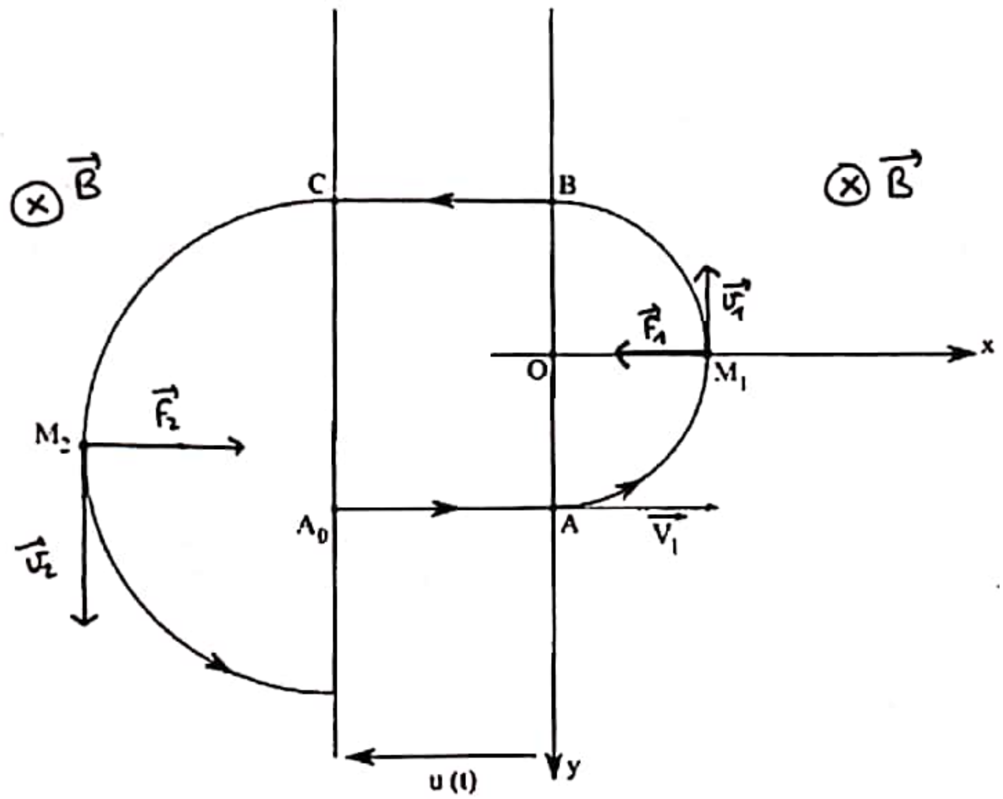
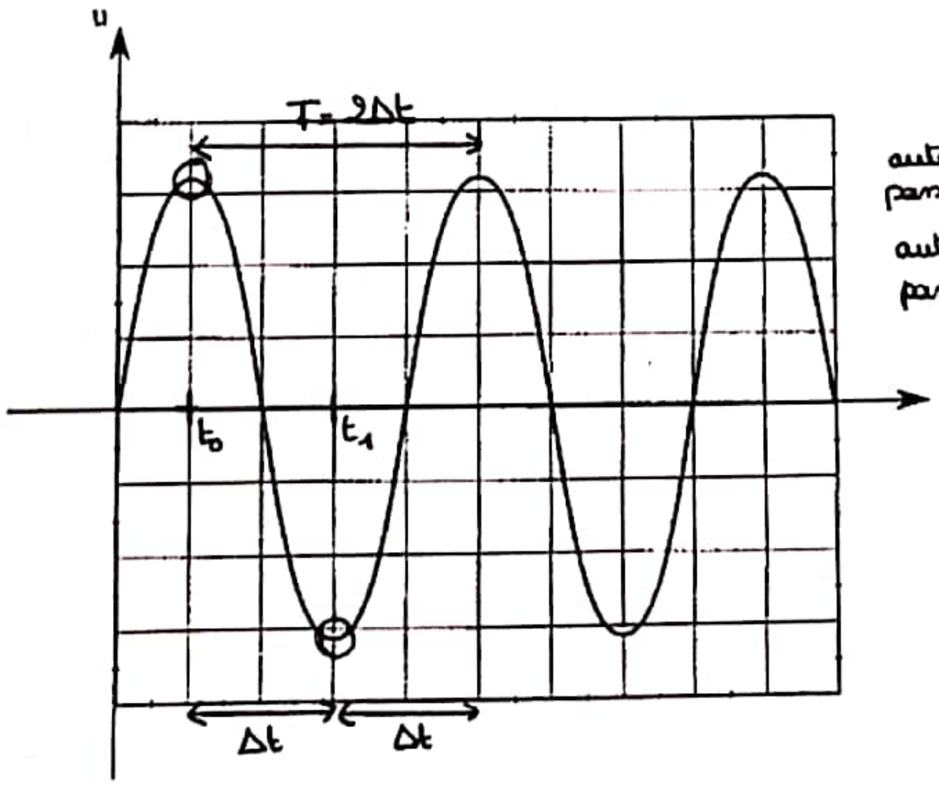


Schéma 1



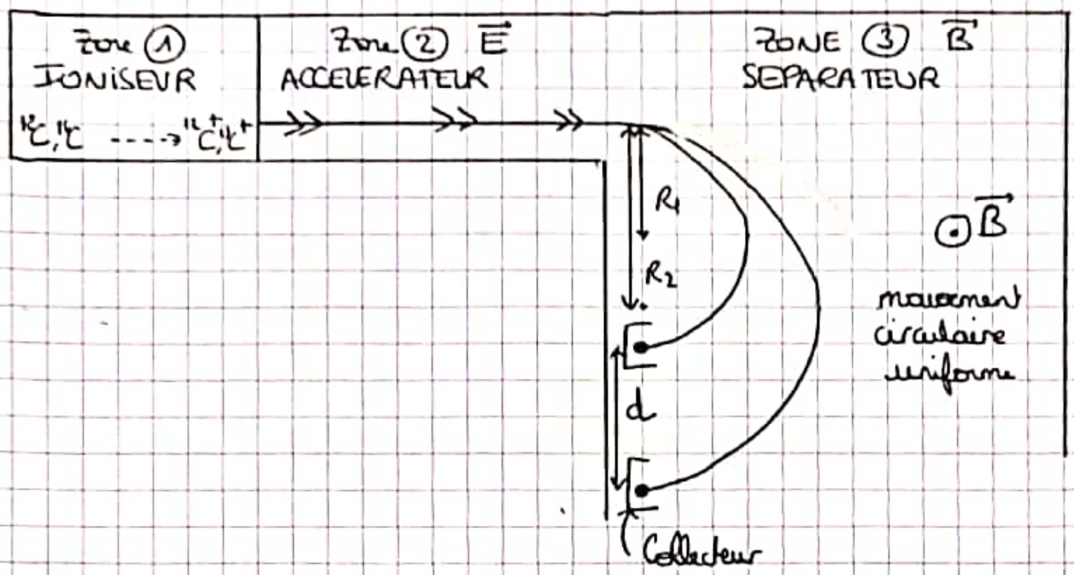
autour de t_0 :
passage de A_0 à A

autour de t_1 :
passage de B à C

Schéma 2

Partie C. Datation d'un echantillon au carbone 14

Representons tout d'abord un schéma du dispositif :



Determinons la vitesse de $^{12}C^+$ et $^{14}C^+$ en sortie de la zone ②.

TEM (forces conservatives) :

$$\frac{1}{2}mv_{0\,entrée}^2 + qV_{entrée} = \frac{1}{2}mv_{0\,sortie}^2 + qV_{sortie}$$

Ainsi $\frac{1}{2}mv_{0\,sortie}^2 = q(V_{entrée} - V_{sortie}) + \frac{1}{2}mv_{0\,entrée}^2$

Posons $v_{0\,entrée} = 0$ et $V_{entrée} - V_{sortie} = U = 10^3 V$, et $q = +e$

Ainsi

$$\boxed{v_{12,14} = \sqrt{\frac{2eU}{m_{12,14}}}}$$

avec $v_{12,14}$ la vitesse en sortie de la zone ② du ^{12}C et du ^{14}C ($v_{12} \neq v_{14}$) et $m_{12,14}$ les masses respectives du ^{12}C et du ^{14}C ($m_{12} \neq m_{14}$).

Une fois dans la zone ③, le mvt est circulaire uniforme, de rayon

$$R_{12,14} = \frac{m_{12,14}\, v_{12,14}}{eB}$$

avec B le champ magnétique que l'on cherche.

donc $R_{12,14} = \frac{m_{12,14}}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m_{12,14}}}$ et donc

donc

$$\boxed{R_{12} = R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_{12}}{e}} \quad \text{et} \quad R_{14} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_{14}}{e}} = R_2}$$

Appelons d la distance entre les deux collecteurs. On a (voir schéma) :

$$D_2 - D_1 = d \Rightarrow 2R_2 - 2R_1 = d \Rightarrow 2(R_{14} - R_{12}) = d$$

donc $d = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{e}}\left(\sqrt{m_{14}} - \sqrt{m_{12}}\right)$

Soit

$$\boxed{B = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{2U}{e}}\left(\sqrt{m_{14}} - \sqrt{m_{12}}\right)}$$

Verifions l'homogénéité de B.

$$\left[\frac{2}{d}\sqrt{\frac{2U}{e}}\left(\sqrt{m_{14}}-\sqrt{m_{12}}\right)\right] = \left(\frac{[U]M}{L^2[e]}\right)^{1/2}$$

or $[P] = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3} = [U]I \Rightarrow [U] = ML^2T^{-3}I^{-1}$

et $[e] = IT$ donc

$$\left[\frac{2}{d}\sqrt{\frac{2U}{e}}\sqrt{m_{14}}-\sqrt{m_{12}}\right] = \left(\frac{ML^2T^{-3}I^{-1}M}{L^2 IT}\right)^{1/2} = \left(M^2T^{-4}I^{-2}\right)^{1/2}$$

$$= MI^{-1}T^{-2} \checkmark$$

or $[qvB] = [\text{force}] = MLT^{-2}$

donc $[B] = \frac{MLT^{-2}}{IT\,LT^{-1}} = MI^{-1}T^{-2} \checkmark$

Donc la relation est homogène.

$$\boxed{B = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{2U}{e}}\left(\sqrt{m_{14}}-\sqrt{m_{12}}\right)}$$

A.N. Prenons $U = 10^3\,V$ (donné dans l'énoncé)

$e = 1,6.10^{-19}\,C \simeq 10^{-19}\,C$

$m_{12} = 12 \times m_{nucléon} = 12.10^{-27}\,kg$

$m_{14} = 14 \times m_{nucléon} = 14.10^{-27}\,kg$

Pour que la taille du dispositif soit raisonnable il faut R_{12} et R_{14} de la taille d'une table (de l'ordre du mètre) et il faut que d soit suffisament grand pour que l'on puisse séparer les deux isotopes (prenons d au moins de l'ordre de quelques cm.)

Choisissons $d = 10\,cm$

alors

$$B = \frac{2}{10^{-1}}\sqrt{\frac{2\,10^3}{1,6.10^{-19}}}\left(\sqrt{10^{-27}\times 14}-\sqrt{10^{-27}\times 12}\right)$$

soit en ODG $B \simeq 10^{-2}\,T$

dans ce cas, $R \underset{ODG}{=} \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{e}}$

A.N. $R = \frac{1}{10^{-2}}\sqrt{\frac{2\,10^3 \times 10 \times 10^{-27}}{1,6.10^{-19}}} \simeq 1\,m$

On trouve $\underline{R_{12,14} \underset{ODG}{\simeq} 1\,m}$ et $\underline{B \underset{ODG}{\simeq} 10^{-2}\,T}$

R est bien de la taille d'une table et $10^{-2}\,T$ est tout à fait réalisable avec un aimant peu couteux !