

PROGRAMME DE COLLES N° 19

Semaine du 03/03/2025 au 07/03/2025

☞ *Dérivabilité* ☞

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 16. Dérivabilité —

Tout le chapitre.

1 Dérivabilité en un point

- 1.1 Définition, point de vue graphique
- 1.2 Interprétation graphique, approximation affine, DL à l'ordre 1
- 1.3 Opérations sur les fonctions dérivables en un point
- 1.4 Dérivée à gauche/à droite

2 Dérivabilité étendue

- 2.1 Dérivabilité sur une partie et classe $\mathcal{D}(X,Y)$
- 2.2 Dérivées d'ordre supérieur
- 2.3 Opérations dans les classes $\mathcal{C}^k(X,Y)$ ou $\mathcal{D}^k(X,Y)$: formule de Leibniz, cas de la réciproque d'une bijection \mathcal{C}^k

3 Propriétés locales et globales des fonctions dérivables

- 3.1 Extremum local et point critique
- 3.2 Théorème de Rolle
- 3.3 Égalité des accroissements finis et applications : variations, théorème de la limite de la dérivée, cas \mathcal{C}^1
- 3.4 Inégalité des accroissements finis : cas de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis.
- $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ est croissante sur I intervalle si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre $x|x| \leq 3x + 2$, montrer que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$ sur $[0; 1]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - 3i$, les racines carrées de $3 - 4i$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, écrire $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$, de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, de $x \mapsto \frac{x^2+x}{x^2+1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : $\int^x \cos t e^{2t} dt$, $\int_0^1 te^t dt$, $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**

Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}, \text{ savoir démontrer que } n!/n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.

Exemples : dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 e^{-x}$, $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x - y|$ pour tous x, y , $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$.