Semestre B

CHAP. 17 - MOMENT CINÉTIQUE ET MOMENT D'UNE FORCE

- Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
- Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
- Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
- Définir un couple.
- Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
- Savoir qu'un moteur ou un frein contient un stator pour qu'un couple puisse s'exercer sur le rotor.
- Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.
- Pendule de torsion : Établir l'équation du mouvement. Expliquer l'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique. Établir une intégrale première du mouvement.
- Pendule pesant : Établir l'équation du mouvement. Expliquer l'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique. Établir une intégrale première du mouvement. Lire et interpréter le portrait de phase : bifurcation entre un mouvement pendulaire et un mouvement révolutif.
- Utiliser la relation $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$, l'expression de J_Δ étant fournie.
- Établir l'équivalence, pour un solide, entre la loi scalaire du moment cinétique et celle de l'énergie cinétique.
- Faire un bilan énergétique pour le tabouret d'inertie.
- *Réaliser l'acquisition expérimentale du portrait de phase d'un pendule pesant. Mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.*

Rapport de Jury : L'intégralité des points a été donnée aux seuls candidats ayant effectué un schéma, exprimé les moments algébriques des forces par rapport à l'axe de rotation orienté et bien traduit la condition de basculement

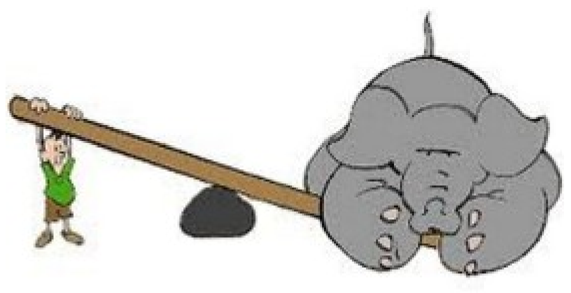
CCPINP 2022 PC Les candidats qui utilisent le bras de levier sont ceux qui réussissent le mieux cette question : ils évitent en général les erreurs de calcul et de signe, et proposent une expression scalaire du moment, comme demandé dans l'énoncé. Très peu de candidats pensent à la réaction de l'axe dans le bilan des forces et la remplacent par une « tension de la tige », sans objet ici.

La définition d'un couple n'est que très rarement juste et complète. Bien que cela n'ait pas été sanctionné, signalons qu'un couple ne se réduit pas systématiquement à deux forces.

Contextualisation

ouvrir une porte : Pour ouvrir une porte on applique une force sur la poignée. Le positionnement de la poignée, ainsi que l'orientation de la force appliquée ne sont pas laissés au hasard. Pour être efficace, la force doit être appliquée le plus loin possible des gonds de la porte qui matérialisent son axe de rotation. De plus, elle doit être appliquée perpendiculairement à la porte. Cette configuration permet d'augmenter au maximum le bras de levier de la force, qui est la distance séparant l'axe de rotation de la porte de la droite d'application de la force

record du monde de javelot : en 1984 Uwe horn lance son javelot à 102m le record du monde commençait à dépasser les limites du terrain de plus les javelot avait tendance à planer et à tomber à l'horiontale au sol sans se planter. Pour ne pas avoir à modifier la taille des terrains et permettre au javelot de bien se planter le centre de gravité du javelot a été déplacé un peu vers l'avant pour qu'il pique du nez plus vite



I Moment cinétique

1.1 Moment cinétique d'un point

On considère un point matériel M de masse m animé d'une vitesse vec v dans le référentiel R. On note $\vec{p} = m \vec{v}$ sa quantité de mouvement.

On considère un point O dans l'espace

a Moment cinétique par rapport à un point

Le moment cinétique de M par rapport à un point O est le vecteur défini par le produit vectoriel :

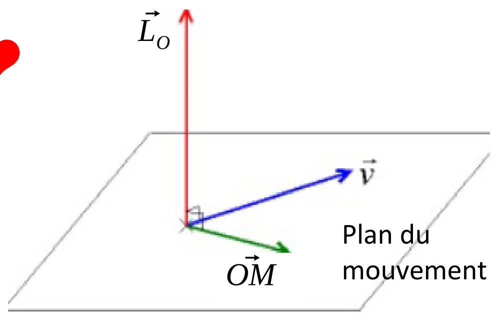
$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m\vec{OM} \wedge \vec{v}$$

Sa norme se mesure en kg·m²·s⁻¹ = J·s.

Rmq 1 : Le moment cinétique $\vec{L}_O$ par rapport à un point O est défini à partir de la vitesse de M.
Il dépend du référentiel dans lequel on le détermine.

Rmq 2 : **si le mouvement est rectiligne** $\vec{v}$ est toujours colinéaire à $\vec{OM}$ et **le produit vectoriel est nul**
$\vec{L}_O = \vec{0}$ (l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{OM}$ vaut 0 ou π donc la norme $\vec{L}_O$ de est nulle)

Rmq 3 : **si le mouvement est plan** le moment cinétique est **orthogonal au plan du mouvement**



Rmq 4 : le moment cinétique dépend du point à partir duquel on le calcul :

En $O' \neq O$ $\vec{L}_O' = \vec{O'M} \wedge \vec{p} = (\vec{O'O} + \vec{OM}) \wedge \vec{p} = \vec{O'O} \wedge \vec{p} + \vec{OM} \wedge \vec{p}$

$$\vec{L}_O' = \vec{O'O} \wedge \vec{p} + \vec{L}_0$$

b Moment cinétique par rapport à un axe orienté

On considère un axe orienté Δ = (O, $\vec{u}_\Delta$) déterminé par un point O et un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ dont le sens précise l'orientation de l'axe.

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté Δ = (O, $\vec{u}_\Delta$) est la projection orthogonale de $\vec{L}_O$ sur l'axe Δ : $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = (m\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta$.

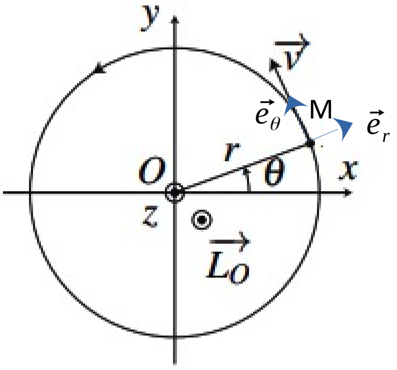
Rmq 1 : L_Δ **est une grandeur scalaire (un nombre) contrairement à** $\vec{L}_O$ **qui est un vecteur**

Rmq 2 : L_Δ est une grandeur algébrique (elle peut être négative ou positive)

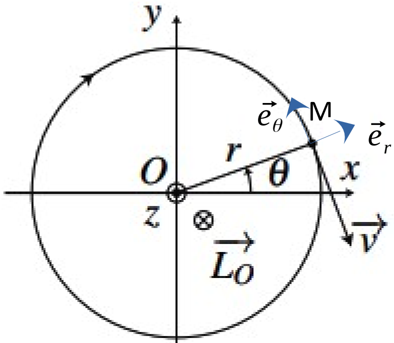
Rmq 3 L_Δ ne dépend pas du choix du point O appartenant à l'axe Δ utilisé pour le calculer mais seulement de la direction et de l'orientation de Δ.

c Exemple

Système : { particule de masse m ayant un mouvement circulaire dans le référentiel d'étude supposée galiléen }



Rotation dans le sens trigonométrique



Rotation dans le sens horaire

$$\vec{OM}=r\,\vec{e}_r$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{OM}}{dt}=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

Si mouvement circulaire $\vec{v}=\dfrac{d\vec{OM}}{dt}=r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

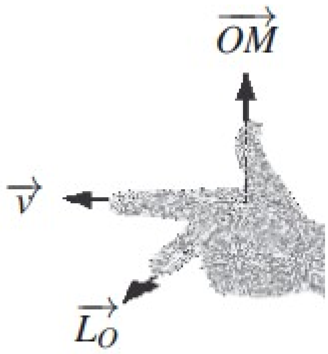
$$\vec{L}_O=(\vec{OM}\wedge m\vec{v})=r\,\vec{e}_r\wedge m(r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L}_O=m\,r^2\dot{\theta}\,(\vec{e}_r\wedge\vec{e}_\theta)$$

$$\boxed{\vec{L}_O=mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z}$$

Rmq 1 : ici $\vec{L}_O$ possède une direction constante ($\vec{e}_z$) **donc le mouvement est plan**

Rmq 2 :On peut trouver la direction de $\vec{L}_0$ à l'aide de la « règle de la main droite » représentée sur la figure ci-contre.



Rmq 3 si on choisit Δ = (O, $\vec{e}_z$) alors $\boxed{L_\Delta = m\,r^2\,\dot{\theta}}$

L_Δ est positif si $\dot{\theta}>0$ donc si le mouvement s'effectue dans **le sens trigonométrique**

L_Δ est négatif si $\dot{\theta}<0$ donc si le mouvement s'effectue dans **le sens horaire**

Le signe de L_Δ donne donc une information sur le sens de rotation

si on choisit Δ = (O, - $\vec{e}_z$) L_Δ <0 si tourne sens trigo et L_Δ > 0 si sens horaire

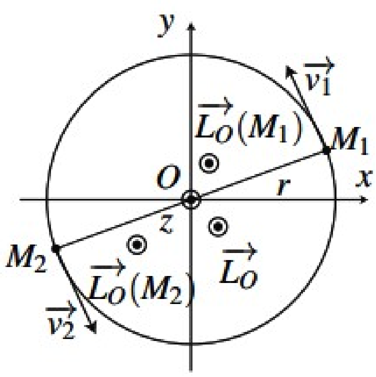
1.2 Moment cinétique d'un système discret de points

On considère un système constitué de plusieurs points matériels Mi de masses mi de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté Δ : $L_\Delta(M_i)$. Le moment cinétique du système de points est obtenu par sommation des moments cinétiques de chacun des points :

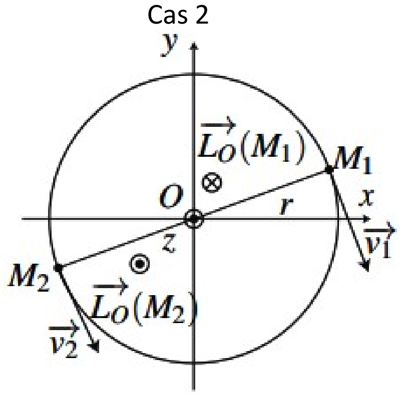
Moment cinétique de l'ensemble du système par rapport à l'axe Δ → $\boldsymbol{L_\Delta=\sum_i L_\Delta(M_i)}$ ← Moment cinétique de chaque point M_i constituant le système par rapport à l'axe Δ

Exemple

Cas 1



Cas 2



Les points M_1 et M_2 tournent à la même vitesse mais pas dans le même sens

Cas 1 : $L_\Delta=\vec{L}_0(M_1)\cdot\vec{u}_z+\vec{L}_0(M_2)\cdot\vec{u}_z=m\,R^2\dot{\theta}_1+m\,R^2\dot{\theta}_2$

Or $\dot{\theta}_1=\dot{\theta}_2=\dot{\theta}$

$$\boldsymbol{L_\Delta=\vec{L}_0(M_1)\cdot\vec{u}_z+\vec{L}_0(M_2)\cdot\vec{u}_z=2\,m\,R^2\dot{\theta}}$$

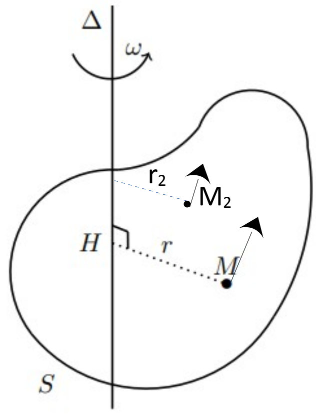
$L_\Delta=\vec{L}_0(M_1)\cdot\vec{u}_z+\vec{L}_0(M_2)\cdot\vec{u}_z=m\,R^2\dot{\theta}_1+m\,R^2\dot{\theta}_2$

$\dot{\theta}_1=-\dot{\theta}_2$ car les points ne tournent pas dans le même sens

$$\boldsymbol{L_\Delta=\vec{L}_0(M_1)\cdot\vec{u}_z+\vec{L}_0(M_2)\cdot\vec{u}_z=0}$$

1.3 Généralisation aux solides

a Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe



On considère un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour d'un axe orienté fixe dans un référentiel R.
On choisit l'axe (Oz) pour qu'il coïncide avec cet axe de rotation. On modélise le solide par un ensemble de points matériels M_i de masse mi repérés en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $M_i(r_i,\theta i,zi)$.
Comme le solide est en rotation autour d'un axe fixe :

→ Les points M_i possède donc tous la même vitesse angulaire $\omega=\dot{\theta}$
→ le point M_i est en rotation autour de H_i et possède un vecteur vitesse :

$$\vec{v}(M_i)=r_i\omega\vec{e}_\theta.$$

Le moment cinétique du solide par rapport à l'axe Δ s'écrit alors

$$L_\Delta=\sum_i L_\Delta(M_i)$$

$$L_\Delta=\sum_i m_i r_i^2\omega=\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega=J_\Delta\omega$$

$J_\Delta=\left(\sum_i m_i r_i^2\right)$ **est appelé moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ**

unité : kg m²

Rmq : Il dépend du référentiel et du choix de l'axe de rotation

à l'échelle macroscopique , le solide est un système continue de points, on peut passer de la somme à l'intégrale : et on considère que chaque point M_i possède une masse élémentaire dm

$$J_\Delta=\left(\sum_i m_i r_i^2\right)=\int r^2\,dm$$

à retenir pour le solide en rotation autorur d'un axe fixe :

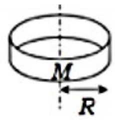
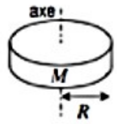
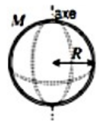
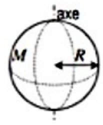
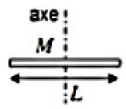
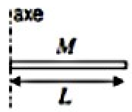
Le moment cinétique par rapport à un axe (Oz) d'un solide en rotation autour de (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est égal au produit du moment d'inertie J(Oz) du solide par sa vitesse angulaire :

$$L_{(Oz)}=J_{(Oz)}\dot{\theta}$$

Rmq 1
En pratique, en notant d la distance qui sépare l'axe Δ=(Oz) du point du solide qui en est le plus éloigné, le moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à (Oz) vaut $J_{(Oz)} = kmd^2$
. Dans cette formule, k est un facteur numérique inférieur à 1 qui ne dépend que de la forme du solide et de la manière dont la masse est répartie à l'intérieur de ce dernier.
Rmq 2 : le moment d'inertie dépend de l'axe choisi

b Exemples de moments d'inertie

Moment d'inertie de quelques solides homogènes

Géométrie	Situation	Schéma	Moment d'inertie
Cylindre	Cylindre creux de rayon R tournant autour de son axe de symétrie Δ		$J_\Delta = MR^2$
	Cylindre plein de rayon R tournant autour de son axe de symétrie Δ		$J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$
Sphère	Coquille sphérique mince de rayon R tournant autour de Δ		$J_\Delta = \frac{2}{3}MR^2$
	Sphère pleine de rayon R tournant autour de Δ		$J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$
Tige	Tige mince de longueur L tournant autour d'un axe Δ perpendiculaire à elle-même passant par son centre		$J_\Delta = \frac{1}{12}ML^2$
	Tige mince de longueur L tournant autour d'un axe Δ perpendiculaire à elle-même passant par une extrémité		$J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2$

Rmq : en physique les moments d'inertie seront toujours données , en SI pas forcement (surtout en deuxième année)

c Signification physique

- Le moment d'inertie J_Δ traduit la capacité d'un solide à s'opposer aux variations du vecteur vitesse

(analogue à la masse inertielle m dans le PFD $\vec{a} = \dfrac{\sum \vec{F}_{ext}}{m}$)

Plus une masse m est éloignée de l'axe de rotation (Oz), plus sa contribution au moment d'inertie par rapport à (Oz) est importante.

Ceci explique pourquoi le moment d'inertie d'un cylindre plein est inférieur à celui d'un cylindre creux de même masse : une partie importante de sa masse est située à faible distance de l'axe et contribue peu à son moment d'inertie.

- La mesure du moment d'inertie d'un solide permet également d'obtenir des informations sur la répartition interne des masses.

Exemple : Les mesures astronomiques du moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe NordSud montrent qu'il vaut $0{,}33M_TR_T^2$ où M_T et R_T sont la masse et le rayon de la Terre. Il est inférieur à celui d'une boule homogène de même masse et même rayon qui vaut $0{,}4M_TR_T^2$. On en déduit que la répartition des masses à l'intérieur de la Terre n'est pas homogène et que la couche profonde située près de son axe de rotation est plus dense que les couches superficielles. Cette couche profonde est le noyau. Connaissant sa taille, on peut estimer sa densité. Elle correspond à celle du fer à haute pression. C'est un des principaux arguments prouvant que le noyau est essentiellement composé de fer.

II Moment d'une force

2.1 Définition

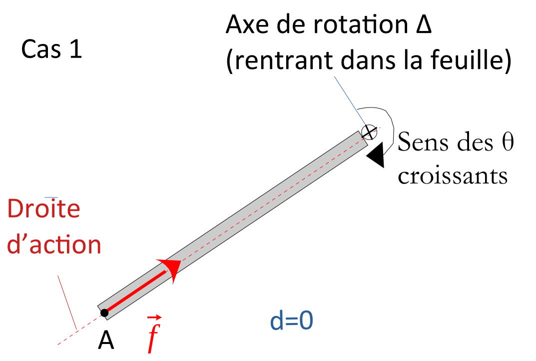
La capacité d'une force à produire une rotation autour d'un axe Δ est appelé moment

le moment de la force $\vec{f}$ est noté $\mathcal{M}(\vec{f})$

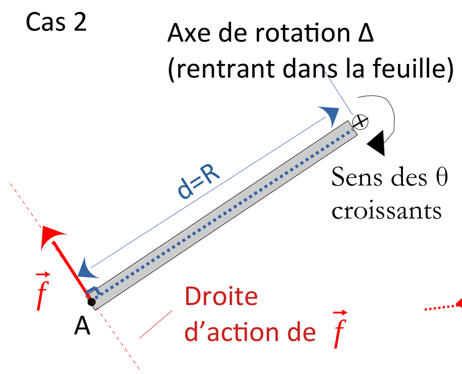
ce moment dépend : Du point d'application A de la force :
De la norme de la force
De la direction

Exemple du kayak

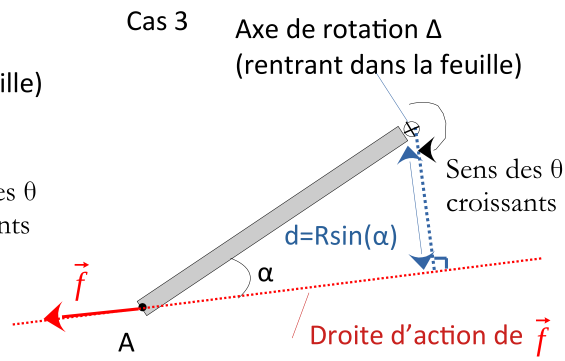
Rotation d'une porte de longueur R



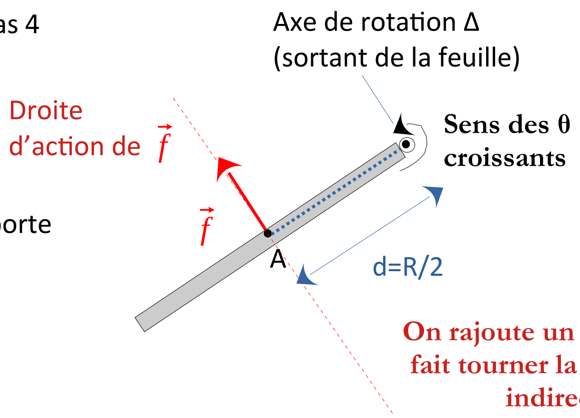
Pas de rotation
$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = 0$



Rotation importante
$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = d\|\vec{f}\| = Rf$



Rotation légère
$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = d\|\vec{f}\| = R\sin(\alpha) f$



Point d'application au milieu de la porte

Rotation plus légère que pour cas 4

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = -d\|\vec{f}\| = -\frac{R}{2}f$$

On rajoute un signe – car la force fait tourner la porte dans le sens indirect de l'axe

a Bras de levier

On appelle **bras de levier** la distance d séparant l'axe Δ de la droite d'action (A , $\vec{f}$). A étant le point d'application de la force

La valeur absolue $|\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})|$ du moment de $\vec{f}$ par rapport a Δ est égale au produit de la norme de la force par le bras de levier :

$$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})| = \|\vec{f}\| \times d$$ = norme de la force x bras de levier

(Sa norme se mesure **en Joule J = N·m.)**

Pour déterminer le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$

Si $\vec{f}$ tend à faire tourner le système dans le sens direct de l'axe Δ (θ croissant) alors $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) > 0$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \|\vec{f}\| \times d$$

Si $\vec{f}$ tend à faire tourner le système dans le sens indirect de l'axe Δ (θ décroissant) alors $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) < 0$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = -\|\vec{f}\| \times d$$

Rmq : cas où $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$ est nul :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = 0 \implies \begin{cases} \vec{f} \,/\!/\, \vec{u_\Delta} \\ \text{ou} \\ \text{la droite d'action de } \vec{f} \text{ coupe } \Delta. \end{cases}$$

C'est le cas 1

b Moment par rapport à un point

On définit le moment en O d'une force par : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f}) = \vec{OA} \wedge \vec{f}$

Il ne faut pas confondre le point de référence O(où on calcul de moment) et le point d'application de la force A

Cas du poids : Le poids s'applique au niveau du centre de gravité G du solide

moment du poids en un point O $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$

Exemple javelot

Rmq :

Le moment des forces par rapport a un point est une grandeur additive : si on considère deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ qui s'appliquent sur M :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f_1}+\vec{f_2}) = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{f_1}+\vec{f_2}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f_1} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f_2} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f_1}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f_2}).$$

c Moment par rapport à un axe orienté

Le moment de la force appliqué en A par rapport à un axe Δ orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ noté $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$ est relié au moment en un point O de l'axe Δ par ;

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta = ((\vec{OM}) \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Rmq : le moment cinétique par rapport à l'axe Δ ne dépend pas du point O choisi (tant qu'il est sur l'axe Δ)
Rmq 2 : le moment cinétique par rapport à un axe est un nombre, le moment cinétique par rapport à un point est un vecteur

2.2 Conditions d'équilibre

Un solide est à l'équilibre ssi

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = 0$$

2.3 Notion de couple

a Définition

Un couple est définit par deux vecteur $\{\ \vec{F}_{ext} = \vec{0}\ ,\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) \neq \vec{0}\ \}$ (un Torseur des actions mécaniques en SI)

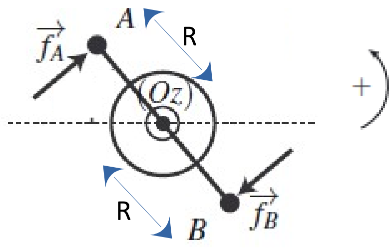
Résultantes des forces nulle et moment des forces extérieures en O non nul

Rmq 1 une seule force ne peut pas créer un couple car la résultante de cette unique force ne peut pas être nulle

Par abus de langage on note souvent un couple $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) \neq \vec{0}$

b Exemple du couple de deux forces

$\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$ opposées s'appliquant respectivement en *A* et *B* forment un couple de forces si leur résultante est nulle :



Résultante $\vec{F}_{ext}=\vec{f}_A+\vec{f}_b=\vec{0}$ *et* $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}_{ext})=\vec{OA}\wedge\vec{f}_A+\vec{OB}\wedge\vec{f}_b$

donc $\|\vec{f}_A\|=\|\vec{f}_b\|$

on pose $f=\|\vec{f}_A\|=\|\vec{f}_b\|$

Si on pose OA = OB = R on a $\vec{OA}\wedge\vec{f}_A=-R\|\vec{f}_A\|\vec{e}_z$ *(règle de la main droite)*

$\vec{OB}\wedge\vec{f}_B=-R\|\vec{f}_B\|\vec{e}_z$ *(règle de la main droite)*

on a donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}_{ext})=\vec{OA}\wedge\vec{f}_A+\vec{OB}\wedge\vec{f}_b=-2Rf\,\vec{e}_z$ *et* $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}_{ext})=\Gamma=-2Rf$

Bien non nul

Rmq :

On peut généraliser la notion de couple a tous les cas ou la somme des forces est nulle et le moment des forces par rapport a un axe (*Oz*) n'est pas nul, sans se préoccuper de savoir s'il a fallu deux forces pour réaliser cette situation.

Exemple

La résultante des actions mécaniques qu'un moteur exerce sur un arbre en rotation est un couple.

c Effet d'un couple sur une liaison pivot

On appel liaison pivot une liaison qui n'autorise qu'une rotation selon un seul axe Δ et aucune translation

C'est la liaison la plus commune dans les systèmes mécaniques. Dans un simple vélo, on en compte plus d'une dizaine puisqu'elle est nécessaire pour relier au cadre les éléments suivant : roues (2), guidon (1), pédalier (1), manettes de frein (2), mâchoires de frein (2). Il y en a également pour relier les pédales au pédalier (2) et encore une bonne demi-douzaine si le vélo possède des dérailleurs_

Au niveau d'une liaison pivot :

- **Un couple moteur** permet **d'accélérer** la rotation (le fait de pédaler sur un vélo) en général le moment d'un tel couple par rapport à l'axe de rotation est positif
- **un couple de freinage permet de ralentir la rotation du rotor (les freins du vélo)**

en général le moment d'un tel couple par rapport à l'axe de rotation est positif

Action de liaison et liaison pivot idéale d'axe (Oz)

L'action de liaison d'une liaison pivot parfaite idéale d'axe (Oz) a un moment par rapport à l'axe (Oz) égal à 0 :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{action de liaison}) = 0$$

La liaison n'exerce ni couple moteur ni résistant sur le solide en rotation (rotor)
cela revient à considérer qu'il n'y a pas de frottements entre stator et rotor

III Loi du moment cinétique

3.1 Théorème du moment cinétique

a Pour un point matériel

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à O est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport au même point O : ♥

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i)$$

Démo :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\right)}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{OM}\wedge\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{p}=\overrightarrow{OM}\wedge\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\ \text{donc}\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{p}=\vec{v}\wedge(m\vec{v})=\vec{0}$$

à l'aide du principe fondamental de la dynamique $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum_i\vec{f}_i$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{OM}\wedge\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{OM}\wedge\sum_i\vec{f}_i=\sum_i\overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}_i=\sum_i\vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{f}_i\right)$$

Rmq : cas du moment cinétique scalaire par rapport à un axe (Oz)

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt}=\sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

b Pour un solide

C'est la même même chose mais $L_{(Oz)}=J_{(Oz)}\dot{\theta}$ et $\frac{dL_{(Oz)}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(J_{(Oz)}\dot{\theta}\right)=J_{(Oz)}\ddot{\theta}$

Donc finalement :

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta}=\sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

♥

c Cas de conservation du moment cinétique (pour un solide)

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est conservé si la somme des moments des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt}=0\Leftrightarrow L_{(Oz)}=cste\Leftrightarrow J_{(Oz)}\dot{\theta}=cste$$

Le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ étant une constante, la vitesse de rotation du solide l'est également.

Rmq : pour **un point matériel $L_{(oz)}$** peut être constant mais la vitesse angulaire variable (par exemple mvt elliptique)

Cas particuliers de conservation :

cas 1 : Solide **en équilibre :** Un solide en rotation est à l'équilibre lorsque $\dot{\theta}=0$ à tout instant.

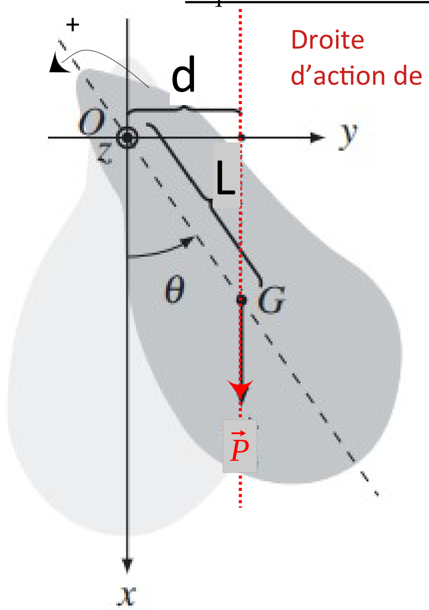
Cas 2 : Un solide subissant seulement une force dite centrale(dont la droite d'action passe par O $\forall t$)

Exemple de conséquence de la conservation : roue de vélo sur une chaise tournante

3.2 Application au pendule pesant

animation

a Équation du mouvement



Système : {pendule pesant de masse m, centre de gravité G à une distance L de O, moment d'inertie $J_{(oZ)}$ par rapport à Oz }

Bilan des actions mécaniques BAM :

Action de liaison créant un moment $\mathcal{M}_{Oz}$ (action de liaison) = 0 (liaison parfaite)

Poids créant un moment par rapport à (Oz) $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -\|\vec{P}\| d$

signe moins car le poids tend à faire tourner dans le sens indirect de l'axe et d'après le schéma d =L sin(θ)

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -\,mg\,L\,\sin(\theta)$$

TMC par rapport à (Oz) : $\frac{dL_{(Oz)}}{dt}=-m\,g\,L\sin(\theta)$ **(1)**

Si on pose $J_{(Oz)}$ le moment d'inertie du pendule par rapport à (Oz) , alors le moment cinétique vaut $L_{(Oz)}=J_{(Oz)}\dot{\theta}$

Donc en réinjectant dans (1) $J_{(Oz)}\ddot{\theta}=-m\,g\,L\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta}+\frac{mgL}{J_{(Oz)}}\sin\theta=0}$ (2) à savoir retrouver

dans l'approximation des petits angles sin θ = θ ,On reconnaît alors une équation d'**oscillateur harmonique** de pulsation propre $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{mgL}{J_{(Oz)}}}}$ et de période propre $\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{J_{(Oz)}}{mgL}}}$

solutions : $\theta(t)=\theta m\cos(\omega_0 t+\phi)$

b Intégrale première du mouvement

Intégrale première veut dire équation de la forme $\frac{dA}{dt}=0$

A est alors une intégrale première du mouvement

Si on multiplie (2) par $\dot{\theta}$: $\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{mgL}{J_{(Oz)}}\sin\theta\,\dot{\theta}=0$

en remarquant que $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2)=\ddot{\theta}\,\dot{\theta}$ et $\frac{d}{dt}(-\cos\theta)=\dot{\theta}\sin\theta$

on trouve $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2)+\frac{mgL}{J_{(Oz)}}\frac{d}{dt}(-\dot{\theta}\cos\theta)=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2-\frac{mgL}{J_{(Oz)}}\cos\theta\right)=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2-mg\,L\cos\theta\right)=0$

Si on primitive par rapport au temps : $\boxed{\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2-mg\,L\cos\theta=cste}$ à savoir retrouver

On voit apparaître des énergies $[\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\alpha}^2]=L^2 M T^{-2}=[Energie]$ Énergie cinétique de rotation

$[mgL\cos(\theta)]=[C]=[m\,g\,L]=M\,LT^{-2}L=[energie]$

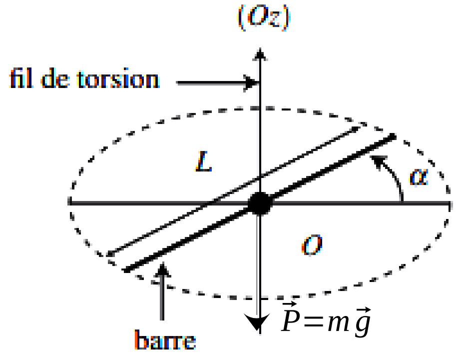
$E_{pp}(\theta)$= -mgLcos(θ) +mgL est l'énergie potentielle de pesanteur du solide (en prenant l'origine en θ=0)

l'intégrale première correspond donc à l'énergie mécanique

3.3 Application au pendule de torsion

Le pendule de torsion est un instrument d'importance capitale dans l'histoire des sciences puisqu'il a servi à mettre en évidence la loi de l'interaction électrostatique de Coulomb et à réaliser la première mesure de la constante de gravitation universelle par H. Cavendish à la fin du XVIIIe siècle

a Équation du mouvement



On définit l'axe (Oz) vertical ascendant matérialisé par le fil de torsion et on prend comm eorigine O du repère le point où ce fil est relié à la barre. Cette dernière est alors en rotation autour de l'axe (Oz) orienté fixe.
La position de la barre est repérée par l'angle α qu'elle fait par rapport à sa position d'équilibre (voir schéma) . Sa vitesse angulaire de rotation vaut .
Le moment d'inertie de la barre est noté $J_{(Oz)}$.

Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :

• son poids dirigé selon (Oz) qui s'applique en son centre de gravité G=O .

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = (\vec{OG}\wedge m\vec{g})\cdot\vec{u}_z$ mais comme G=O , **le moment du poids par rapport à (Oz) est nul**

• la force exercée par le fil de torsion dont le moment par rapport à (Oz) est égal au moment du couple de torsion :

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{f}_{torsion}) = \boldsymbol{\Gamma = -C\,\alpha}$ ***Plus l'angle est grand, plus le couple est important***

• $\mathcal{M}_{Oz}$ (action de liaison) = 0 (liaison parfaite)

TMC par rapport à (Oz): $\dfrac{dL_{(Oz)}}{dt}=-C\,\alpha$ (1)

Si on pose $J_{(Oz)}$ le moment d'inertie de la barre , alors le moment cinétique vaut $L_{(Oz)}=J_{(Oz)}\dot{\alpha}$ et $\dfrac{dL_{(Oz)}}{dt}=J_{(Oz)}\ddot{\alpha}$

Donc en réinjectant dans (1) $J_{(Oz)}\ddot{\alpha}=-C\,\alpha\Leftrightarrow$ $\boxed{\ddot{\alpha}+\dfrac{C}{J_{(Oz)}}\alpha=0}$ (2) à savoir retrouver

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{C}{J_{(Oz)}}}}$

et de période propre $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{J_{(Oz)}}{C}}$

b Intégrale première du mouvement

Si on multiplie (2) par $\dot{\alpha}$:

$$\dot{\alpha}\ddot{\alpha}+\frac{C}{J_{(Oz)}}\alpha\dot{\alpha}=0$$

en remarquant que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2\right)=\ddot{\alpha}\dot{\alpha}$ et $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\alpha^2\right)=\dot{\alpha}\alpha$

on trouve $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\right)+\frac{C}{J_{(Oz)}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\alpha^2\right)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2+\frac{C}{J_{(Oz)}}\frac{1}{2}\alpha^2\right)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\alpha}^2+\frac{C}{2}\alpha^2\right)=0$$

Si on primitive par rapport au temps : $\boxed{\dfrac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\alpha}^2+\dfrac{C}{2}\alpha^2=cste=E_m}$

Énergie cinétique de la barre en rotation autour de (Oz)

énergie potentielle élastique stockée dans le fil de torsion.

Cette intégrale première correspond à l'énergie mécanique

IV Loi de l'énergie cinétique

4.1 Cas des solides

a Énergie cinétique d'un solide en rotation

Un solide de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ en rotation autour d'un axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}=\omega$ possède l'énergie cinétique :

$$\boxed{E_{c,rotation}=\frac{1}{2}J_{(Oz)}\omega^2}$$

Démo : On modélise le solide par un ensemble de points matériels M_i de masse m_i repérés en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $M_i(r_i,\theta_i,z_i)$.

On a vu que le moment d'inertie du solide par rapport à (Oz) vaut alors J $J_{(Oz)}=\left(\sum_i m_i r_i^2\right)$

Par ailleurs, on a vu dans le chapitre Cinématique du solide qu'un point M_i quelconque du solide est en mouvement de rotation circulaire de rayon r_i à la vitesse angulaire commune $\dot{\theta}=\omega$ possède un vecteur vitesse $\vec{v}(M_i)=r_i\omega\vec{e}_\theta$.

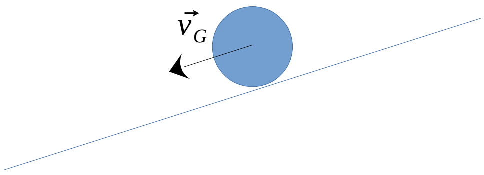
L'énergie cinétique du point M_i son énergie cinétique $E_c(M_i)=\frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$.

L'énergie cinétique du solide est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent

$$E_C=\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J_{(Oz)}\omega^2$$

Rmq : un système peut avoir à la fois une énergie cinétique de translation et une énergie cinétique de rotation

Exemple du cylindre descendant un plan incliné



$$E_{c,tot}=E_{c,rotation}+E_{c,translation}=\frac{1}{2}J_{(Oz)}\omega^2+\frac{1}{2}mv_G^2$$

b Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation, lien avec le moment de la force

On considère une force $\vec{f}_i$ qui s'applique au point A d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. la puissance associée a pour expression

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{f}_i)=\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)\times\dot{\theta}}$$

À retrouver par anaylse dim

c Théorème de la puissance cinétique pour un solide (théorème de l'énergie cinétique sous forme)

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures $\vec{f}_i$ qu'on lui applique

$$\frac{dE_c}{dt}=\sum_i\mathcal{P}(\vec{f}_i)\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2\right)=\sum_i\mathcal{M}_{(OZ)}(\vec{f}_i)\dot{\theta}\Leftrightarrow J_{(Oz)}\dot{\theta}\ddot{\theta}=\sum_i\mathcal{M}_{(OZ)}(\vec{f}_i)\dot{\theta}$$

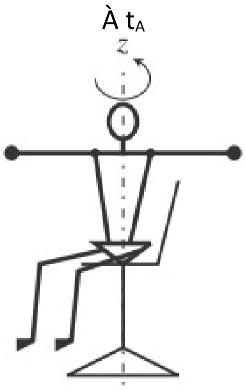
En divisant par : $\dot{\theta}$ $\quad J_{(Oz)}\ddot{\theta}=\sum_i\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$

Donc finalement :

Pour étudier un solide en rotation autour d'un axe fixe, les lois de l'énergie cinétique ou du moment cinétique sont équivalentes et donnent des équations identiques.

4.2 Cas des systèmes déformables

a) exemple du tabouret d'inertie



bras tendus, le moment d'inertie du système est J_T et vitesse angulaire $\dot{\theta}_T$

bras repliés, son moment d'inertie est $J_R < J_T$ *
la vitesse angulaire $\dot{\theta}_R$

Bilan des actions mécaniques **extérieures**

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{poids}) = \left(\overrightarrow{OG} \wedge (-mg\vec{u_z})\right) \cdot \vec{u_z} = 0$$

$\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0$ dans le cas d'une liaison idéale.

* les haltères se rapprochent de l'axe lorsque les bras sont repliés donc leurs contributions au moment d'inertie diminue.

D'après la loi du moment cinétique (TMC) ou le TEC : $dL_{(oz)}/dt = 0 \rightarrow L_{(oz)} = \text{cste}$

Le moment cinétique du système se conserve (moments des forces nuls) donc : $J_T\dot{\theta}_T = J_R\dot{\theta}_R$

$L_{(oz)}$ À t_A $L_{(Oz)}$ à t_B

b) Non conservation de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique bras tendus valait : $E_{cT} = \frac{1}{2}J_T\dot{\theta}_T^{\,2}$ **Bras repliés, elle vaut :** $E_{cR} = \frac{1}{2}J_R\dot{\theta}_R^{\,2}$

$$E_{c_R} = \frac{1}{2}J_R\dot{\theta}_R^2 = \frac{1}{2}J_R\dot{\theta}_R\dot{\theta}_R = \frac{1}{2}J_T\dot{\theta}_T\dot{\theta}_R$$
$$= \frac{\dot{\theta}_R}{\dot{\theta}_T}E_{c_T} = \frac{J_T}{J_R}E_{c_T}.$$

L'énergie ciéntique du système varie !

Or si on suppose que les seules forces on présence sont le poids et les actions mécaniques de la liaison pivot on aurait d'après le TEC

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i) = \sum_i \mathcal{M}_{(oz)}(\vec{f}_i)\dot{\theta} = 0$$

ce qui n'est pas le cas ! Il y a contradiction , on a oublié des forces à prendre en compte

Conclusion à retenir :

Lorsqu'un système se déforme, les forces <u>intérieures</u> fournissent une puissance non-nulle. Il faut en tenir compte dans la loi de l'énergie cinétique. La puissance des forces intérieures est nulle lorsque le système est indéformable.

d <u>Théorème de la puissance cinétique pour un solide déformable</u>

Dans le référentiel R galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures et intérieures qui s'exercent sur lui :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i,\,interieures} \mathcal{P}(\vec{f}_{i,\text{int}}) + \sum_{i,\,extérieures} \mathcal{P}(\vec{f}_{i,\text{ext}})$$