TD17 – MOMENT CINÉTIQUE ET MOMENT D'UNE FORCE

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

1 Donner la définition du moment cinétique par rapport à un point O d'un point matériel M de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen.

2 Que peut-on dire du moment cinétique par rapport à un point O d'un point matériel M :
   a si M a une trajectoire rectiligne (O appartient à la trajectoire) ?
   b si M a une trajectoire plane (O appartient au plan de la trajectoire) ?

3 Donner la relation entre le moment cinétique de M par rapport à O et celui ett celui par rapport à O'.

4 Donner la définition du moment cinétique d'un point M par rapport à l'axe $\Delta=(O,\vec{u_\Delta})$.

5 Soit un point M en rotation circulaire (de centre O et de rayon R) autour d'un axe fixe $\Delta=(O,\vec{e_z})$. Etablir l'expression du moment cinétique de M par rapport à O, puis par rapport à Δ. Commenter le signe de L_Δ.

6 On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta=(O,\vec{u_\Delta})$. Donner sans démonstration la relation entre le moment cinétique scalaire du solide, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie du solide.

7 Donner la dimension d'un moment d'inertie, sa signification physique, et expliquer pourquoi, si on considère une boule homogène et une sphère de même masse, $J_{BOULE}<J_{SPHERE}$.

8 Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe$\Delta=(O,\vec{u_\Delta})$, sur lequel on exerce une force $\vec{F}$ appliquée au point M du solide.
   a Définir le bras de levier de$\vec{F}$ à l'aide d'un schéma.
   b Quelle relation peut-on utiliser pour déterminer le moment de $\vec{F}$ par rapport à Δ, connaissant le bras de levier de $\vec{F}$?

9 Définir le moment en O d'une force $\vec{F}$ dont le point d'application est A.

10 Définir un couple.

11 Définir une liaison pivot. Qu'est-ce qu'une liaison pivot idéale (ou parfaite) ?

12 On considère un solide qui, en présence d'un couple, est en rotation à la vitesse angulaire $\omega=\dot{\theta}$ autour d'un axe fixe Δ. Donner l'expression de la puissance de ce couple en fonction du moment du couple et de la vitesse angulaire de rotation autour de Δ.

13 Énoncer puis démontrer le théorème du moment cinétique vectoriel pour un point matériel.

14 Comment se réécrit le théorème du moment cinétique pour un solide de moment d'inertie J_Δ en rotation autour d'un axe fixe Δ ?

15 Expliciter les cas de conservation du moment cinétique :
   a Pour un point matériel.
   b Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta=(O,\vec{u_\Delta})$.

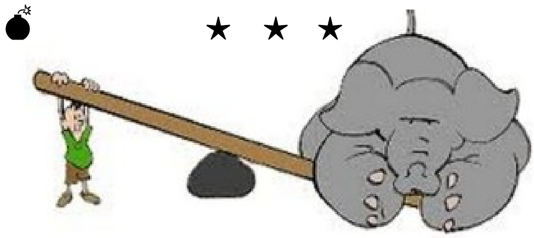
16 On considère un pendule pesant de moment d'inertie J_{Oz} par rapport à (Oz) et soumis à l'action exercée par une liaison pivot idéale.
   16.a Etablir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. Commenter.
   16.b Etablir une intégrale première du mouvement. Commenter.

17 On considère un pendule de torsion de moment d'inertie J_{Oz} par rapport à (Oz) , soumis à l'action exercée par une liaison pivot idéale et un couple de torsion $\Gamma=-C\,\theta$
   a Établir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. Commenter.
   b Etablir une intégrale première du mouvement. Commenter.

18 On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta=(O,\vec{u_\Delta})$, de moment d'inertie J_Δ. Donner sans démonstration l'expression de son énergie cinétique.

19 Montrer que, pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, il y a équivalence entre la loi scalaire du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique (sous forme différentielle).

Exercice 2 : ★ ★ ★



Soit O le point d'appui du levier. On suppose que le centre de gravité G de l'éléphant, de masse M = 5 t, est sur le levier, à une distance OG = 1 m du point d'appui.

Le levier fait un angle $\alpha=20°$ avec l'horizontale. Il est nécessairement très solide, on tiendra donc compte de sa masse linéique $\mu=10\,\mathrm{kg/m}$.

Quelle longueur de levier l'homme (m = 80 kg) doit-il choisir pour pouvoir soulever l'éléphant avec son propre poids ? (réponse : 26 m)

Exercice 3 : Pendule simple ★ ★ ★

On considère un pendule simple (point matériel M de masse m accroché à un fil de masse $m_{FIL} << m$). On néglige les frottements devant toutes les autres forces. Retrouver l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.

Exercice 4 : Modèle de Bohr ★ ★ ★

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (appelé aussi modèle semi-classique) consiste en les deux hypothèses suivantes :

1ère : la trajectoire de l'électron est circulaire autour du noyau fixe ;

2ème : le moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe du cercle ne peut prendre que les valeurs $n\hbar$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = h/2\pi \approx 1{,}055 \,.\, 10^{-34}$ J.s .

1. En utilisant la 2ème hypothèse, établir une relation liant le rayon de l'orbite rn, la vitesse de l'électron v_n et la constante de Planck réduite $\hbar$

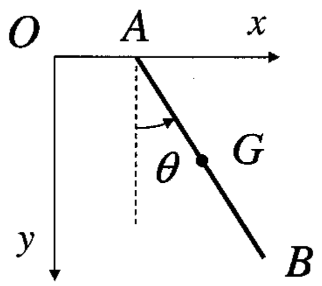
2.En appliquant le PFD à l'électron et en utilisant le résultat précédent, montrer que $v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\cdot\frac{1}{n}$ où e est la charge élémentaire et ϵ_0 la permittivité du vide.

3-Établir l'expression de l'énergie mécanique En du niveau n.

4. Application numérique : montrer que ce modèle simple permet de retrouver le résultat expérimental concernant le spectre discret de l'atome d'hydrogène :

$$E_n = \frac{-13{,}6}{n^2}\text{eV}$$

Exercice 5 : Barre oscillante ★ ★ ★



On considère une barre homogène AB de masse m et de longueur 2l. Son moment d'inertie par rapport à l'axe $\Delta = (A, \vec{e}_z)$ vaut $J_\Delta = \frac{1}{3}m(2l)^2$. Le point A est fixe. la barre est lâchée avec une angle θ_0 et avec une vitesse initiale nulle.

La liaison pivot en A est parfaite. On a $\vec{P} = P\vec{e}_y$.

1 Quelle est la trajectoire de son centre d'inertie G ?

2 Exprimer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle puis l'énergie mécanique de la barre (on peut choisir une énergie potentielle nulle pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

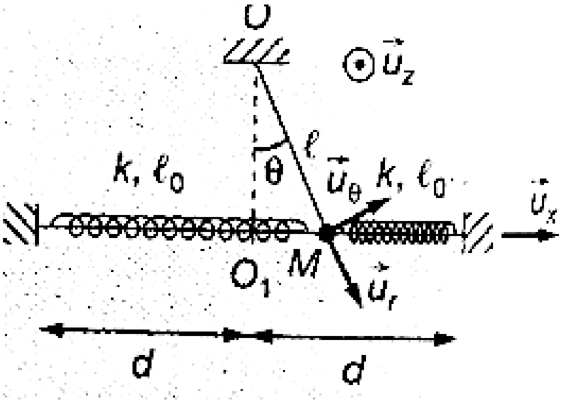
3 Quelle est la vitesse v_B du point B (en fonction de l, g et θ_0) lorsque la barre passe par la position verticale ?

4 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ(t). En déduire θ en fonction du temps pour θ<<1rad.

5 Exprimer la période T des « petits mouvements » de la barre en fonction de l et g.

6 On accroche une Masselotte de masse M en G. le moment d'inertie de la masselote est $J_\Delta^{masselotte} = l^2 M$. Sachant que le moment d'inertie de l'ensemble {tige+ masselotte} est la somme des moment d'inertie de la tige et de la masselotte. Établir l'équation du mouvement de ce pendule pesant et déterminer la nouvelle période des oscillations T' des « petits mouvements .

Exercice 6: Pendule lié à deux ressorts ★ ★



Une bille M de masse m est reliée à un fil inextensible (longueur l, masse négligeable devant m) et à deux ressorts horizontaux (raideur k, longueur à vide l_0). A l'équilibre, la bille est en O_1 et la longueur de chaque ressort vaut l_0. On se place dans la limite des petits angles : on supposera l'angle θ entre la verticale et le fil suffisamment petit pour que les ressorts restent horizontaux. On notera x la distance O_1M, supposée bien inférieure à d.

1 En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle en θ du mouvement de la bille.

2 En déduire la période T des petites oscillations horizontales de M.

Exercice 7: Tabouret d'inertie ★ ★ ★ ★

Une personne est assise sur un tabouret dont le siège peut tourner sans frottement autour d'un axe vertical Δ. Elle tient dans ses mains deux haltères de masse m.

Pour simplifier, nous admettons que les haltères sont ponctuels. Une autre personne lui demande de ramener les haltères près du corps jusqu'à une distance r1 de l'axe. Elle lui imprime un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω_1 (état 1), puis lui demande de tendre les bras, ce qui place les haltères à une distance r_2 de l'axe. Sa vitesse angulaire de rotation est alors ω_2 (état 2). Le système S = {tabouret + personne + haltères} constitue donc un système déformable, de moment d'inertie $J_{1\Delta}$ dans l'état 1 et $J_{2\Delta}$ dans l'état 2.

1. Que dire du moment cinétique scalaire L_Δ du système S pendant l'expérience.

2. Comparer $J_{1\Delta}$ et $J_{2\Delta}$.

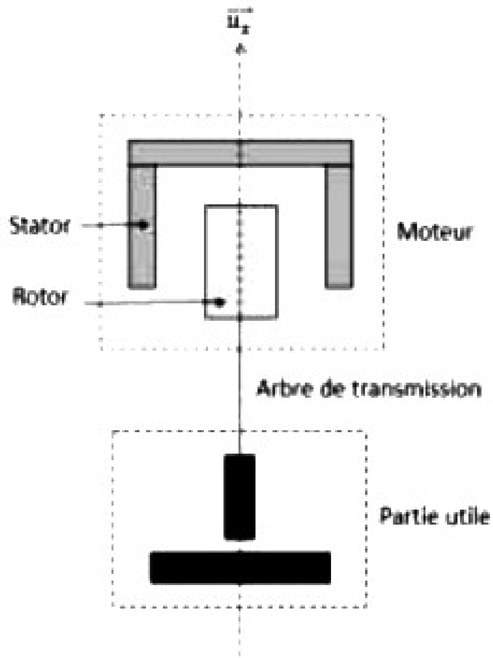
3. En déduire une comparaison de ω_1 et ω_2.

4. Calculer la variation d'énergie cinétique ΔEc entre les états 1 et 2. Comment évolue-t-elle ?

5. Interpréter ce résultat.

Exercice 8 : étude dynamique d'un moteur ★ ★ ★

On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante (par exemple, une perceuse). Le rotor, partie tournante du moteur, entraîne la parte tournante utile de la machine grâce à un arbre de transmission. L'axe de rotation est noté $\vec{u}_x$. La vitesse angulaire de rotation du rotor est notée ω, avec $\omega \geq 0$. La partie fixe du moteur (stator) entraîne le rotor en exerçant sur lui un couple dont la valeur en projection sur $\vec{u}_x$ est $\mathcal{M}_s > 0$



1. En déduire le signe du couple $\mathcal{M}_u$ exercé par la partie utile tournante sur le rotor.

2. Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux dont l'action sur le rotor se ramène à un couple $\mathcal{M}_f = -\alpha\omega$. On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de sorte que leur moment projeté sur Ox est nul (pivot parfait). On note J le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation. En déduire l'équation différentielle de ω(t).

3. En supposant que les couples $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_u$ sont a peu près constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de ω(t) sachant qu'on met le moteur en marche à t=0.

4. En déduire la vitesse angulaire de fonctionnement en régime permanent. Dépend-elle des frottements du fluide ? Ces derniers ont-ils une autre influence ? Que dire des valeurs relatives des couples $\mathcal{M}_u$ et $\mathcal{M}_s$?

5 Un hélicoptère Robinson R44 nécessite au décollage une puissance P = 180 cv avec des pales tournant à environ 7 tours/s. Quel est le couple exercé par le moteur sur les pales ? Données : 1 cheval vapeur (1 cv) vaut 736 W.