EXERCICE 2 : Extrait concours CCP

A_1. $q>0$ et $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_x}$. Les particules seront accélérées si $\vec{F_{el}} = q\vec{E}$ est dans le même sens que $\vec{v_0}$. En effet, d'après le PFD,

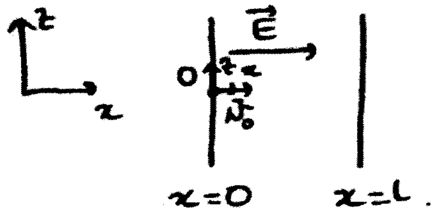
$m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v_0} + \frac{q\vec{E}}{m} t$

donc $\|\vec{v}\| \nearrow$ si $\vec{E} \cdot \vec{e_x}$ sont de même signe.

donc $\boxed{\vec{E} = E\vec{e_x} \text{ avec } E>0}$

A_2. schéma :



pour avoir $\vec{E} = +E\vec{e_x}$ on doit avoir $V(x=L) < V(x=0)$ car $\vec{E}$ est dirigé selon les potentiels décroissants.

donc $V_2 < V_1 \Rightarrow \boxed{V_2 - V_1 = U < 0}$

A_3. Système : {particule} Ref : $\mathcal{R}$ sup. galiléen.
BDF : $\vec{F_{el}} = +q\vec{E}$ CONSERVATIVE

d'après le TEM, $E_m = cste$ et donc $E_m(x=0) = E_m(x=L)$
donc

$$\frac{1}{2} m \underbrace{v^2(x=0)}_{v_0} + qV_1 = \frac{1}{2} m \underbrace{v^2(x=L)}_{v} + qV_2$$

$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2qU}{m}}}$ (Rq : on retrouve bien que $v > v_0$ si $U<0$)

Rq : On pourrait traiter cette question en utilisant directement $\Delta E_c = -q\Delta V$.

A_4. A.N. $v = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 1.10^{3}}{235 \times 1{,}66 \times 10^{-27}}} \Rightarrow \underline{v = 2{,}9.10^{4} m.s^{-1}}$

<u>Partie B - Mouvement dans $\vec{B}$ uniforme</u>

B_1. Qu. de cours. Système : {particule} Ref : $\mathcal{R}$. BDF : $\vec{F_{mag}}$ ($\vec{P}$ négligé devant $\vec{F_{mag}}$)

PFD :

$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{array}\right. \quad \text{avec } \omega_c = \frac{qB}{m}$$

$\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = cste = 0$ (car $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$) et donc $z = cste \underset{CI}{=} 0 \ \forall t$

$\Rightarrow$ <u>le mouvement se fait dans le plan (Oxy)</u>

B_2. qu. de cours. D'après le TEC $\Delta E_c = \sum W(\vec{F_{ext}})$

or ici la seule force qui s'applique est $\vec{F_{mg}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

or $\mathcal{P}(\vec{F_{mag}}) = \vec{F_{mg}} \cdot \vec{v} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v} = 0$ par déf du produit vectoriel.

Or, $\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(F)\,dt$ donc $\delta W(F_{mag}) = 0 \ \forall t \Rightarrow$ la force magnétique ne travaille pas.

donc $\Delta E_c = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta v = 0}$!

<u>Le mouvement est uniforme</u>.

B-3. Qu. de cours (encore !). On admet que le mouvement est circulaire.
$\Rightarrow$ on passe en polaires.

PFD : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = v_0\,\vec{e_\theta}$ (constante)

et $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{e_r} + \underbrace{\frac{dv_0}{dt}}_{=0}\vec{e_\theta}$

donc $$m\begin{pmatrix} -v_0^2/R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{e_r} \\ \leftarrow \vec{e_\theta} \\ \leftarrow \vec{e_z} \end{array}$$

et donc
$$-m\frac{v_0^2}{R} = q v_0 B$$ soit, en norme,

$$\boxed{R = \frac{m v_0}{|q|B}}$$ (Rq : ici $q>0$ donc pas besoin des valeurs absolues)

B-4. Le rayon de la trajectoire circulaire des $^{238}U^+$ est

$$R_{238} = \frac{m_{238} v_{238}}{eB} \quad \text{avec} \quad v_{238} = \sqrt{\frac{2e|W|}{m_{238}}}$$
↳ d'après qu. A.3, car $v_0 = 0$

De plus le rayon de la trajectoire des $^{235}U^+$ est

$$R_{235} = \frac{m_{235} v_{235}}{eB} \quad \text{avec} \quad v_{235} = \sqrt{\frac{2e|W|}{m_{235}}}$$

on a donc $R_{238} = \frac{1}{eB}\sqrt{2m_{238}e|W|} \Rightarrow \boxed{R_{238} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_{238}|W|}{e}}}$

de m̂ $\boxed{R_{235} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_{235}|W|}{e}}}$

or,
$$d = 2R_{238} - 2R_{235}$$

donc
$$d = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2|W|}{e}}\left(\sqrt{m_{238}} - \sqrt{m_{235}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{(\sqrt{m_{238}} - \sqrt{m_{235}})^2} = \frac{4}{B^2} \times \frac{2|W|}{e}$$

soit
$$\boxed{|W| = \frac{eB^2d^2}{8(\sqrt{m_{238}} - \sqrt{m_{235}})^2}}$$

A.N. $$|W| = \frac{1{,}6.10^{-19} \times (0{,}1)^2 \times (2.10^{-2})^2}{8(\sqrt{238 \times 1{,}66.10^{-27}} - \sqrt{235 \times 1{,}66.10^{-27}})^2}$$

$$\Rightarrow \underline{|W| = 5{,}1\ \text{kV}}$$

(Soit $W = -5{,}1$ kV)

Partie C - Le cyclotron ⚠ erreur d'énoncé $B = 1{,}0\,T$ et pas $B = 0{,}1\,T$

C.1. A l'intérieur d'un Dee, le proton a une trajectoire circulaire de rayon $R = \frac{m_p v_0}{qB}$ où v est la vitesse du proton lorsqu'il pénètre dans le Dee
↳ Cette vitesse ne varie pas car le mvt est uniforme.

donc $T_{1/2} = \frac{\text{distance parcourue}}{v_0} = \frac{\pi R}{v_0}$ soit

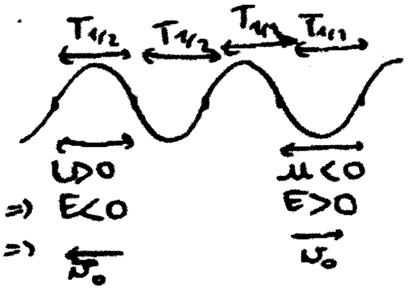
$$T_{1/2} = \pi \times \frac{1}{v_0} \times \frac{m v_0}{qB}$$

$$\Rightarrow \quad T_{1/2} = \pi \frac{m}{qB} \quad \text{soit} \quad \boxed{T_{1/2} = \frac{\pi}{\omega_c} \quad \text{où } \omega_c = \frac{qB}{m}}$$

On en déduit que $T_{1/2}$ ne dépend ni de R ni de v_0 ! $T_{1/2}$ sera donc toujours le $\bar{m}$ ∀ soit la phase du processus d'accélération → principe $\bar{m}$ du cyclotron.

C.2 et C.3. Pour accélérer le proton ∀ soit le sens de sa vitesse, il faut inverser le sens de $E(t)$ (et donc de $u(t)$) au bout de chaque demi tour, c-a-d imposer une tension alternative de demi période $T_{1/2}$, donc de période

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{qB}{m}}.$$



Rq : en pratique une tension créneau aurait d'accélérer au max la particule à chaque passage, mais une tension sinusoïdale est plus simple à réaliser.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}}$$

C-4. A la sortie du cyclotron $R = R_s = 50\,cm = 0{,}50\,m$.

Or $R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v_s = \frac{qBR_s}{m}$ or $E_c = \frac{1}{2} m v_s^2$

et donc

$$E_c = \frac{1}{2} m \frac{e^2 B^2 R_s^2}{m^2} \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} \frac{e^2 B^2 R_s^2}{m_p}}$$

⚠ $B = 1T$

A.N. $E_c = \frac{1}{2} \frac{(1{,}6.10^{-19})^2 (1)^2 (0{,}5)^2}{1{,}66.10^{-27}} = \underline{1{,}9.10^{-12}\,J}$
(= 2 avec les bons c.s car $B = 1T \to 1\,C.S$).

soit $\underline{E_c = 12\,MeV}$

C.5. A chaque passage dans l'entre Dee, le proton est accéléré de telle sorte que :

$$\Delta E_c = e|u_m|$$

A.N. (avec $B = \underline{\underline{1T}}$
$u_m = 10^5\,V$)
$R_s = 0{,}5\,m$

donc $N = \frac{E_c}{\underbrace{2\Delta E_c}_{\text{2 passages par tour}}} = \boxed{N = \frac{1}{4} \frac{e B^2 R_s^2}{m_p |u_m|}}$

$\Rightarrow \underline{N = 60 \text{ tours}}$

C-6.a. $P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$ or trajectoire circulaire uniforme $\Rightarrow \|\vec{a}\| = \left|\frac{-v^2}{R}\right|$

donc $P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\left(\frac{v^2}{R}\right)^2$

soit $P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c R^2} \times v^4 \rightarrow \boxed{P_r = \alpha v^4 \text{ avec } \alpha = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c R^2}}$

C.6.b. L'energie rayonnée pendant la dernière trajectoire semi-circulaire est :

$$E_r = P_r \times T_{1/2}$$

soit

$$E_r = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R_s^2} v^4 \times \pi \frac{m}{eB} \Rightarrow E_r = \frac{\mu_0 e\, m}{6cBR_s^2} \times v_s^4$$

or $v_s = \frac{eBR_s}{m}$ donc $E_r = \frac{\mu_0 e m}{6cBR_s^2} \times \frac{e^4 B^4 R_s^4}{m^4}$

soit

$$\boxed{E_r = \frac{\mu_0 e^5 B^3}{6 c m^3} R_s^2}$$

avec $B = 1T$

A.N. $E_r = \frac{4\pi.10^{-7} \times (1{,}6.10^{-19})^5 \times (1)^3}{6 \times (3{,}00.10^8) \times (1{,}67.10^{-27})^3} \times (0{,}5)^2$

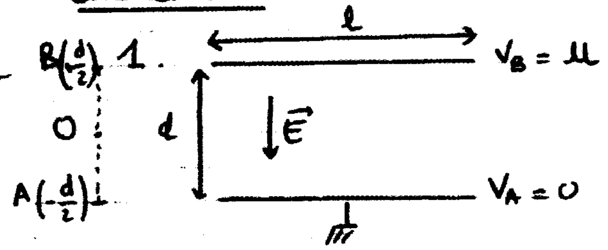
$\Rightarrow$ $\underline{E_r = 3{,}9.10^{-30}\,J}$ soit $\underline{2{,}5.10^{-11}\,eV}$

Conclusion $\underset{\text{1 demi tour}}{E_r} \ll E_{c_s}$ $\left(\frac{E_r}{E_{cs}} \sim \frac{10^{-11}}{10^{+7}} = 10^{-18}\,!\right)$ et donc

<u>on peut ne pas tenir compte de la perte d'energie par rayonnement</u> dans un cyclotron.

EXERCICE 3

1.



D'après le cours $\vec{E}$ est dirigé selon le potentiel V décroissant donc

$$\vec{E} = -E_0 \vec{e_y}$$

De plus, comme on admet que $\vec{E}$ est uniforme, d'après le cours, $E_0 = \frac{U}{d}$.

DEMONSTRATION : $\vec{E}$ uniforme et $V(y) = -E_0\, y + \text{cste}$
alors

$$V(+\tfrac{d}{2}) = U = -E_0 \frac{d}{2} + \text{cste}$$

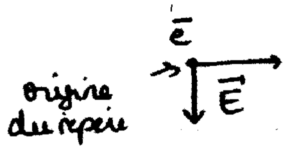
$$V(-\tfrac{d}{2}) = 0 = +E_0 \frac{d}{2} + \text{cste}$$

alors $U = -E_0 d \Rightarrow E_0 = -\frac{U}{d}$ (on retrouve $\|\vec{E}\| = E_0 = \frac{U}{d}$ et $\vec{E}$ selon $-\vec{e_y}$)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{e_y}}, \quad \|\vec{E}\| = \frac{U}{d}.$$

2.a. Champ $\vec{E}$ uniquement, $\vec{v_0}$ non colinéaire à $\vec{E}$ → trajectoire parabolique.

Système : {$\bar{e}$ de masse m et de charge $-e$}
Référentiel : TSG
BDF : poids (négligé devant $\vec{F_{el}}$), $\vec{F_{el}} = q\vec{E}$



D'après le PFD appliqué à $\bar{e}$: $m\vec{a} = q\vec{E} = -e\vec{E}$

or $\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{e_y}$ donc $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -\frac{U}{d} \times (-e) \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = +\frac{Ue}{md} = \text{cste} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \text{ et donc } \boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = +\frac{1}{2}\frac{Ue}{md}t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

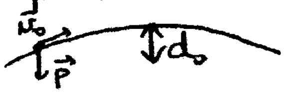
$v_0 \neq 0 \Rightarrow t = \frac{x(t)}{v_0}$ alors $\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\frac{Ue}{md}\frac{x^2}{v_0^2}}$ ⇒ la trajectoire est une parabole de sommet (0,0,0) et tq $a > 0$ ($y = ax^2$)

⇒ conforme avec le schéma de l'exercice.

2.b. Système : {$\bar{e}$} Réf : TSG
BDF : aucune. ($\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{P}$ reste "très faible")

⇒ le mvt est rectiligne uniforme

N.B. Dire que $\vec{P}$ est négligeable, ou "très faible" devant rien, sous entendu devant 0, n'a AUCUN SENS PHYSIQUE. Ici, on considère que le poids est "inexistant" en réalité il est présent et le mouvement est parabolique (type chute libre). Mais si on calcule l'écart dû au poids, on verra que la distance d_0 est très négligeable devant toutes les longueurs de l'expérience).



D'où l'expression de l'énoncé "l'influence de $\vec{P}$ est très faible".

on considère que $m\vec{a} = \vec{0}$ $\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$ CI ?

$\Rightarrow$ le mvt est rectiligne uniforme.

losque $\bar{e}$ quitte $\vec{E}$, on a $x_0 = l$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}_e$ est alors constant et égal à celui de la fin du mvt étudié à la question précédente.

on avait $x(t) = v_0 t$ donc l'électron atteint $x = l$ losque $t = t_l$ tq

$$l = v_0 t_l \Rightarrow t_l = \frac{l}{v_0}$$

or $\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2}\frac{Ue}{md} t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = \frac{Ue}{md} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t_l) = v_0 \\ \dot{y}(t_l) = \frac{Ue}{md}\frac{l}{v_0} \end{cases}$

$$\Rightarrow \|\vec{v}_e\|^2 = v_0^2 + \left(\frac{Ue}{md}\frac{l}{v_0}\right)^2$$

mais ici on demande une équation cartésienne.

En prenant $t' = 0$ au début de la phase de mvt rectiligne uniforme, (nvelle origine des tps)

on a $\begin{cases} x(t') = v_0 t' + l \\ y(t') = \frac{Ue}{md}\frac{l}{v_0} t' + y(t_l) \end{cases}$

or $y(t_l) = \frac{1}{2}\frac{Ue}{md} t_l^2 = \frac{1}{2}\frac{Ue}{md}\frac{l^2}{v_0^2}$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x(t') = v_0 t' + l \\ y(t') = \frac{Ue}{md}\frac{l}{v_0} t' + \frac{1}{2}\frac{Ue}{md}\frac{l^2}{v_0^2} \end{cases}$$

donc $t' = \frac{x - l}{v_0}$ et donc

$$y = \frac{Ue}{md}\frac{l}{v_0}\frac{(x-l)}{v_0} + \frac{1}{2}\frac{Ue}{md}\frac{l^2}{v_0^2}$$

soit $y(x) = \frac{Ue}{md v_0^2}\left[lx - l^2 + \frac{1}{2}l^2\right] = \frac{Ue}{md v_0^2}\left[lx - \frac{1}{2}l^2\right]$

$\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = \frac{Uel}{md v_0^2}\left(x - \frac{1}{2}l\right)}$ valable à $t > t_l = \frac{l}{v_0}$

Pour déterminer les coordonnées de H, on détermine x_H tq $y = 0$.

$$y(x_H) = 0 \Rightarrow \frac{eUl}{md v_0^2}\left(x_H - \frac{1}{2}l\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_H = \frac{l}{2}}$$

2.c. on a $Y = \frac{eUl}{mdv_0^2}\left(\left(\frac{l}{2}+D\right)-\frac{l}{2}\right) = \frac{eUlD}{mdv_0^2}$

$$\Rightarrow \boxed{Y = \frac{eUl}{mdv_0^2}D}$$

on constate que Y est proportionnelle à U (DDP entre les plaques). Ce dispositif peut donc dévier des électrons (sans champ $\vec{B}$) et contrôler leur point d'impact.

remarque: $[qV] = [\text{energie}] = ML^2T^{-2} \Rightarrow \left[\frac{eUl}{mdv_0^2}\right] = \frac{\cancel{ML^2T^{-2}}\,\cancel{L}}{\cancel{M}\,\cancel{L}\,\cancel{L^2T^{-2}}} = \phi$

donc $[Y] = [D] \Rightarrow$ homogène (c'est beau !)

ET ÇA...
C'EST BEAU !