

# PROGRAMME DE COLLES N° 20

Semaine du 10/03/2025 au 14/03/2025

👉 *Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$ , polynômes* 👈

## Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

## — Chapitre 17 — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ —

### 1 Diviseurs, multiples, division euclidienne

### 2 PGCD, PPCM

- 2.1 PGCD, algorithme d'Euclide . . . . .
- 2.2 PPCM . . . . .

### 3 Nombres premiers, factorisation première d'un entier. Application au calcul du pgcd, du ppcm

## — Chapitre 18 — Polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ —

Le début, jusqu'au produit.

### 1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

- 1.1 Polynôme, degré . . . . .
- 1.2 Combinaisons linéaires, produit . . . . .

### Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 17. Existence et unicité de la division euclidienne de  $a \in \mathbb{Z}$  par  $b \in \mathbb{N}^*$ .
- Chapitre 18. Montrer que  $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$  pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ .
- Chapitre 18. Déterminer les couples  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$  tels que  $PQ = 1$  et interpréter.

## Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est  $2\pi$ -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule  $\cos(2a)$ , résolution de  $\sin a = \sin b$ ,  $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos x = \sin x$ .

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre  $x|x| \leq 3x + 2$ , montrer que  $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , encadrer rapidement  $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$  sur  $[0; 1]$ .

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées,  $n$ -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de  $\sqrt{3} - 3i$ , les racines carrées de  $3 - 4i$ , linéarisation de  $\cos^3 x$ , résolution de  $z^n = 1$  dans  $\mathbb{C}$ .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour  $\sum_{k=1}^n q^k$ , calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ , écrire  $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$  avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir  $\text{Arctan}$ , simplifier  $\text{Arccos}(\cos(7))$ , théorème de dérivation de  $g \circ f$ , dérivée de  $x \mapsto f(-x)$ , donner une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$ , de  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ , de  $x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$ , ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de  $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**

Exemples :  $\int^x \cos t e^{2t} dt$ ,  $\int_0^1 te^t dt$ ,  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$  en posant  $t = \sin x$ .

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre  $xy' + y = x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = 1$ , expression de la suite vérifiant  $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $v_0 = v_1 = 1$ .

- **Limites de suites.**

Exemples :  $\lim \sqrt[n]{n}$ ,  $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$ ,  $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ,  $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ , adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}, \text{ savoir démontrer que } n!/n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , calcul de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ , de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$ .

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.

Exemples : dérivée  $n$ -ième de  $x \mapsto x^2 e^{-x}$ ,  $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x - y|$  pour tous  $x, y$ ,  $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$  pour tout  $x > 0$ .