DS05 correction

Problème 1

Partie A

A.1) La corde est fixée à ses extrémités $\Rightarrow$ $\boxed{y(0,t)=0\ \forall t \text{ et } y(-\ell,t)=0\ \forall t}$

A.2) équation aux dimensions $[c]=1\times[\underbrace{T_0^{\alpha}}_{\text{force}}][\underbrace{\mu^{\beta}}_{\text{masse/longueur}}] \iff L.T^{-1}=(LT^{-2}M)^{\alpha}(M.L^{-1})^{\beta}$

$$L.T^{-1}=L^{\alpha-\beta}\times T^{-2\alpha}\times M^{\alpha+\beta}$$

on en déduit par identification : $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\-2\alpha=-1\\\alpha-\beta=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1/2\\\beta=-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow c=K\,T_0^{1/2}\mu^{-1/2}$

$$\boxed{c=K\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

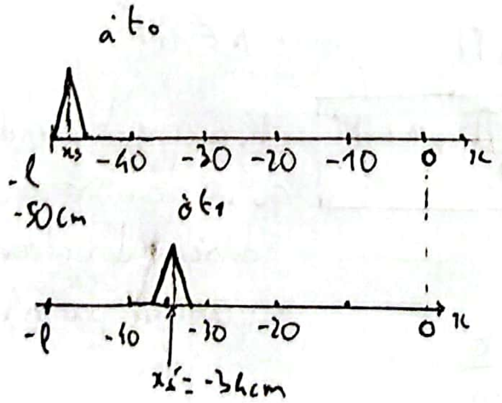
A.3) $c=\sqrt{\dfrac{118}{\underbrace{6\times10^{-3}}_{\text{conversion en kg/m}}}}=\boxed{140\,m/s}$

A.4) à $t_0=0$ le sommet de la corde est en $x_s=-\ell+2cm$

à $t_1=1ms$ le sommet s'est déplacé de $\delta_s=c\times(t_1-t_0)=14{,}0cm$

donc en $x'_s=x_s+\delta_s=\underline{-34cm}$

à $t_0=0s$ la fin de la déformation est en $x_f=-\ell$ à $t_1=1ms$ elle s'est déplacé de $\delta_f=c\times(t_1-t_0)$ et se trouve en $x_f'=x_f+\delta_f=-36cm$



on remarque que

A.5) $y(x,t)=y(x-\underbrace{c(t-t_1)}_{\substack{\text{distance}\\\text{parcourue}\\\text{en }\Delta t=t-t_1\\(\text{si } t_1<t)}},t_1)$

on en déduit

$$y(x,t)=y(x-ct+ct_1,t_1)$$

donc $\boxed{\beta=ct_1}$

en prenant $t_1=0$: $y(x,t)=y(x-ct,0)$

donc $\boxed{y(x,t)=y(x-ct)}$

<u>L'onde est donc progressive</u>

Partie B

B.1) $\boxed{y_r(x,t) = Y_m \cos(\omega t + Kx + \varphi_r)}$

car le sens de propagation est différent

B.2)

$$Y_{tot}(x,t) = Y_m \cos(\underbrace{\omega t - Kx + \varphi_i}_{b}) + Y_m \cos(\underbrace{\omega t + Kx + \varphi_r}_{a})$$

or $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ avec $\frac{a+b}{2} = \omega t + \frac{\varphi_i + \varphi_r}{2}$

$\frac{a-b}{2} = Kx + \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}$

$$\boxed{Y_{tot}(x,t) = 2Y_m \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_i+\varphi_r}{2}\right)\cos\left(Kx + \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}\right)}$$

Par identificat° $A = 2Y_m$, $\psi = \frac{\varphi_i + \varphi_r}{2}$, $\theta = \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}$

B.3) $Y_{tot}(0,t) \overset{\forall t}{=} 0 \Leftrightarrow A\cos(\omega t + \psi)\cos(\theta) = 0$ $\forall t$ or $\exists t$ tq $A\cos(\omega t + \psi) \neq 0$

donc

$\Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \underset{\uparrow \frac{\Delta\varphi}{2}}{\theta} = \frac{\pi}{2} + p\pi_{\ p\in\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + p\pi$ $p \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \underline{\Delta\varphi = 2\pi p + \pi \ p\in\mathbb{Z}}$

B.4) $y_{tot}(-\ell, t) = 0 \ \forall t \Leftrightarrow A\cos(\omega t + \psi)\cos(-K\ell + \theta) = 0 \ \forall t$

$\exists t$ tel que $\cos(\omega t + \ell) \neq 0$ et $A \neq 0 \Rightarrow \cos(-K\ell + \theta) = 0 \ \forall t$.

or $\theta = \frac{\pi}{2} + p\pi \Leftrightarrow \cos(-K\ell + \theta) = \pm \sin(K\ell)$

$\Rightarrow \sin(K\ell) = 0 \Leftrightarrow K\ell = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{K_n = \frac{n\pi}{\ell}, n \in \mathbb{N}^*}$ K ne peut prendre qu'un nombre discret de valeur (quantifié par n)

B.5) $\omega_n = 2\pi f_n = K_n c$

$f_n = \frac{K_n c}{2\pi} \Leftrightarrow \boxed{f_n = \frac{n \times c}{2L} \quad n \in \mathbb{N}^*}$

$\lambda_n = \frac{c}{f_n}$

$\boxed{\omega_n = \frac{\pi c n}{L} \quad \text{et } \lambda_n = \frac{2L}{n}}$

B.6) $\underset{\uparrow \text{fondamentale}}{f_1} = 140\,Hz$ | si $L = 25\,cm$ $\underline{f_1' = 2f_1} = 280\,Hz$

B.7)

$y_n(x,t) = A\cos(w_n t + \varphi_n)\cos(K_n x + \theta)$

or $\cos(K_n x + \theta) = \pm \sin(K_n x) = \pm \sin(\frac{n\pi}{L} x)$

et $w_n = n w_1$

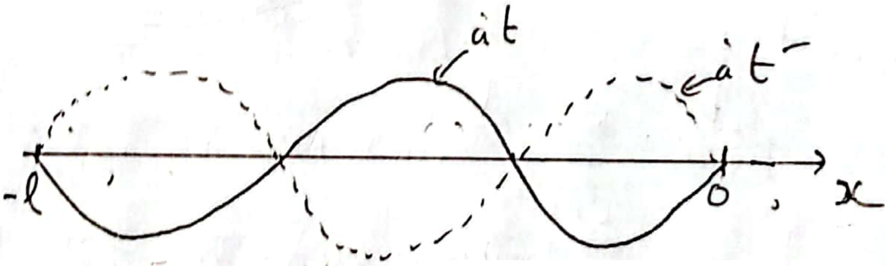
donc $y_n(x,t) = \underbrace{\pm A}_{Y_0} \cos(n \times w_1 t + \varphi_n)\sin(\frac{n\pi}{L} x)$

bien de la forme attendue

B.8) $Y_3(x,t) = Y_0 \cos(3w_1 t)\sin(\frac{3\pi}{\ell} x)$

à $t = \frac{2\pi}{w_1} \Rightarrow \cos(3w_1 t) = \cos(6\pi) = 1 \Rightarrow Y_3(x,t) = Y_0 \sin(\frac{3\pi}{\ell} x)$

à $t' = \frac{3\pi}{w_1} \Rightarrow \cos(3w_1 t') = -1 \Rightarrow Y_3(x,t') = -Y_0 \sin(\frac{3\pi}{\ell} x)$
$\cos(9\pi)$



B.9) il y a n ventres et n+1 noeuds

Problème 2

A.1)

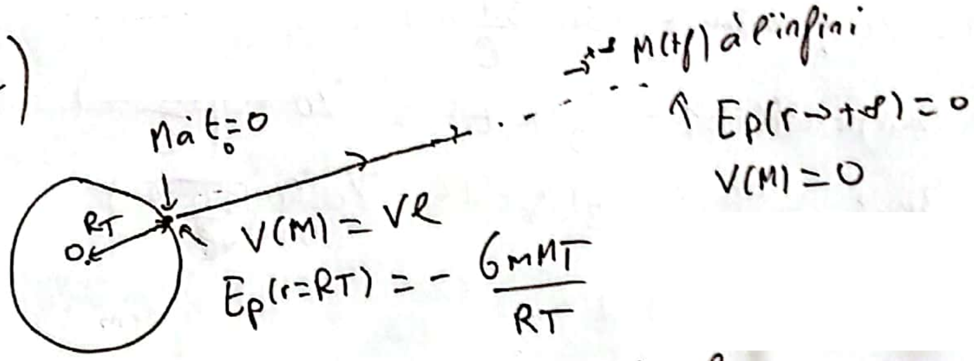
$\vec{F}_G(M)_{T/\text{satellite}} = -\frac{G m M_T}{r^2}\vec{e_r}$ force conservative $\Rightarrow \delta W(\vec{F_G}) = -dE_{p_{grav}}(r)$

$$\delta W(\vec{F}_G(M)) = \vec{F}_G(M)\cdot \underbrace{d\vec{OM}}_{(dr\vec{e_r}+\dots\vec{e_\theta}+\dots\vec{e_z})} = -\frac{G m M_T\,dr}{r^2}$$

$$-\frac{G m M_T}{r^2}dr = -dE_{p_{grav}} \Rightarrow \frac{dE_{p_{grav}}}{dr} = \frac{G m M_T}{r^2} \Rightarrow E_{p_{grav}}(r) = -\frac{G m M_T}{r} + K$$

si $E_{p_{grav}}(r\to+\infty) = 0 \Leftrightarrow K = 0 \Rightarrow \boxed{E_{p_{grav}}(r) = -\frac{G m M_T}{r}}$

A.2)



le système subit seulement des forces conservatives

donc $E_M = cste \Leftrightarrow \Delta E_{M\ M(t_0)\to M(t_f)} = 0$

TEM

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\cdot \underbrace{0}_{\text{vitesse nulle à } \infty}^2 + \underbrace{E_{p_{grav}}(r\to\infty)}_{0 \text{ nulle à } \infty} = \frac{1}{2}m v_e^2 + E_{p_{grav}}(R_T)$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}m v_e^2 - \frac{G m M_T}{R_T}$

$\Leftrightarrow v_e^2 = \frac{2 G M_T}{R_T}$

$\Leftrightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$

A.3) A.N: $\boxed{v_e = 11{,}2 \text{ km/s}}$

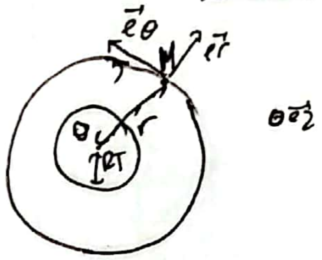
A.4) $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

$\dot{r}$: 0 car mvt circulaire

a

or $v = \|\vec{v}\| = r\dot{\theta}$ et $\frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{r}\vec{e_r}}$

$\Rightarrow r\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r}$



A.5) $\frac{dEc}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f_{ext}})$ ici la seule force extérieure est la force gravitationnelle $\vec{F_G} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{e_r}$

et $\mathcal{P}(\vec{F_G}) = \vec{F_G}\cdot\vec{v} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{e_r}\cdot v\vec{e_\theta} = 0$ ($\vec{e_r} \perp \vec{e_\theta}$)

ainsi $\frac{dEc}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = cste \Rightarrow \boxed{v = cste}$ (m = cste) $\in$ mvt uniforme

A.6) $2Ec(r) = 2\times\frac{1}{2}mv^2(r) = m\frac{GM_T}{r}$ et $Epgrav(r) = -\frac{GM_Tm}{r}$

On a bien $\underline{2Ec + Epgrav = 0}$

Partie B

$Epeff(r) = \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{Ep1(r)} + \underbrace{\left(-\frac{GM_Tm}{r}\right)}_{Epgrav(r)}$

on sait que $\vec{F_1} = -\frac{dEp1}{dr}\vec{e_r}$

$\vec{F_2} = -\frac{dEpgrav}{dr}\vec{e_r}$

$\uparrow$ c'est la force gravitationnelle qui est attractive

Par contre

$\vec{F_1} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right)\vec{e_r} = +\overbrace{\frac{L^2}{mr^3}}^{>0}\vec{e_r}$ $\underline{\text{m sens que } \vec{e_r}}$

M $\vec{e_r}$

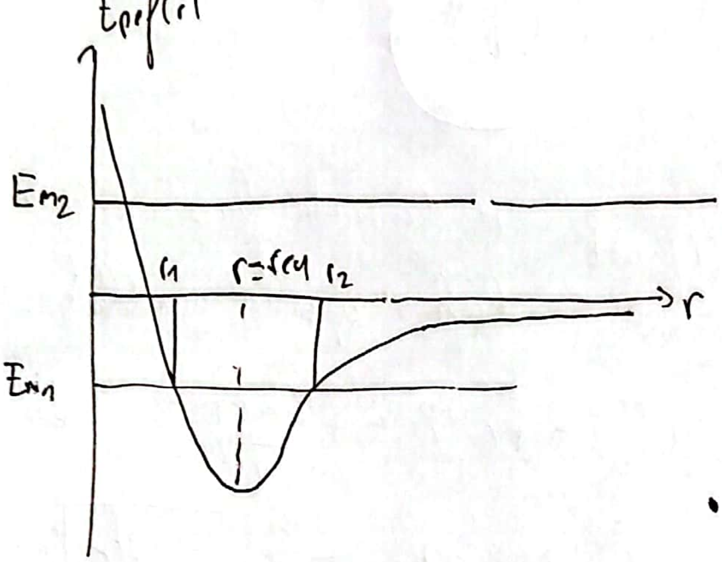
M_T $\vec{F_1} \leftarrow$ $\underline{\text{répulsive}}$ $Ep1(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$ associé à une force répulsive

B.2) à l'équilibre $E_{p_{ef}}(r=r_{eq})$ est extrémale $\Leftrightarrow \dfrac{dE_{p_{ef}}(r=r_{eq})}{dr}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GM_Tm}{r}\right)_{(r=r_{eq})}=0 \Leftrightarrow -\frac{L^2}{mr_{eq}^3}+\frac{GmM_T}{r_{eq}^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{GmM_T}{r_{eq}^2}=\frac{L^2}{mr_{eq}^3} \Leftrightarrow \boxed{r_{eq}=\frac{L^2}{Gm^2M_T}}$$

B.3)



- si $E_m = E_{m1}$ le mouvement est : borné entre $r=r_1$ et $r=r_2$ (mouvement elliptique) état lié
- si $E_m = E_{m2}$ le sattelite peut aller à l'infini (état de diffusion)

B.4) si on déplace légèrement un système de la position d'équilibre stable, il tend à y revenir.
cela correspond à un minimum de $E_{pef}(r)$

sur le graphique :
$r=r_{eq}$ est bien une position d'équilibre stable car un minimum de $E_{pef}(r)$

Problème III

Q1) $\mathcal{P}(\vec{f}_{mag}) = \vec{f}_{mag} \cdot \vec{v} = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$ or $\vec{v} \wedge \vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$

donc $\mathcal{P}(\vec{f}_{mag}) = 0$

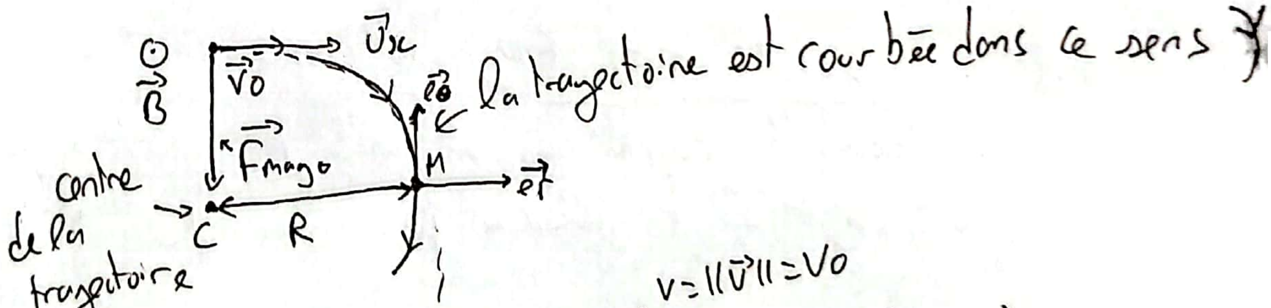
- système : {particule}
- Bilan des forces : • Poids négligeable devant $\vec{f}_{mag}$
  • $\vec{f}_{mag}$

Theorème de l'energie cinétique sous forme puissance :

$$\frac{dEc}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{ext}) \underset{\text{ici}}{=} 0 \iff Ec = cste \iff \frac{1}{2}mv^2 = cste$$

donc $\boxed{v = cste}$

Q2) $\uparrow \vec{u_y}$; $\vec{f}_{mag_0} = q v_0 \vec{u_x} \wedge B_0 \vec{u_z} = \underline{-q v_0 B_0 \vec{u_y}}$



Q3) $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = -V_0\vec{e_\theta}$ $\quad \boxed{\vec{a} = -\frac{V_0^2}{R}\vec{e_r}}$ $\quad v = \|\vec{v}\| = V_0$ $\quad$ (ici $\frac{dv}{dt} = 0$) Q1

Q4) en appliquant le PFD au système :

$m\vec{a} = \vec{f}_{mag}$ avec $\vec{f}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(-V_0\vec{e_\theta} \wedge B_0\vec{u_z}) = -qV_0B_0\vec{e_r}$

$\iff -m\frac{V_0^2}{R}\vec{e_r} = -qV_0B_0\vec{e_r}$ projection sur $\vec{e_r}$:

$$\frac{mV_0^2}{R} = qV_0B_0$$

$\boxed{R = \frac{mV_0}{qB_0}}$ avec $\boxed{\omega_c = \frac{qB_0}{m}}$

er

Q5) $\vec{F}_{mag} = q(\underbrace{v_0\vec{u_z}}_{=\vec{a}\vec{B}}^{\vec{v_0}}) \wedge B_0\vec{u_z} = \vec{0}$

$\|\vec{F}_{mag}\| = \|q\vec{v_0}\| \, \|B_0\| \times \sin(\underbrace{\text{angle entre } \vec{v_0} \text{ et } \vec{B_0}}_{0 \text{ ici}})$ Primitive

Le PFD donne $m\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{cte} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} V_x = \dot{x} = 0 \\ V_y = \dot{y} = 0 \\ V_z = \dot{z} = V_0 \end{cases}$

vitesse initiale $\dot{z}(0) = V_0$

Le cation n'est pas confiné car il se déplace librement selon (Oz) à vitesse constante il peut aller à l'infini si pas d'obstacles

Q6) A.N $R = 5 \times 10^{-5}$ m << Rayon interne

donc le plasma ne touche pas les bords (ce qui est une bonne nouvelle car sa température peut atteindre 1 million de °C!)