DS05 correction

Problème 1

Partie A

A.1) La corde est fixée à ses extrémités $\Rightarrow$ $\boxed{y(0,t)=0 \ \forall t \text{ et } y(-\ell,t)=0 \ \forall t}$

A.2) équation aux dimensions $[c] = \Pi \times [T_0^{\alpha}][\mu^{\beta}] \Leftrightarrow L.T^{-1} = (LT^{-2}M)^{\alpha}(M.L^{-1})^{\beta}$

(T_0 : force ; μ : masse / longueur)

$L.T^{-1} = L^{\alpha-\beta} \times T^{-2\alpha} \times M^{\alpha+\beta}$

on en déduit par identification : $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ -2\alpha=-1 \\ \alpha-\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1/2 \\ \beta=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c = k\, T_0^{1/2} \mu^{-1/2}$

$$\boxed{c = k\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

A.3) $c = \sqrt{\dfrac{118}{6\times10^{-3}}} = \boxed{140 \text{ m/s}}$

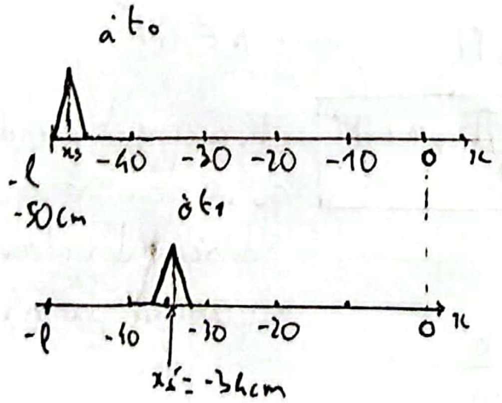
(6×10^{-3} : conversion en kg/m)

A.4) à $t_0=0$ le sommet de la corde est en $x_s = -\ell + 2\text{cm}$

à $t_1 = 1\text{ms}$ le sommet s'est déplacé de $\delta_s = c\times(t_1-t_0) = 14{,}0\text{cm}$

donc en $x'_s = x_s + \delta_s = \underline{-34\text{cm}}$

à $t_0 = 0$s la fin de la déformation est en $x_f = -\ell$ à $t_1 = 1$ms elle s'est déplacé de $\delta_f = c\times(t_1-t_0)$ et se trouve en $x_f' = x_f + \delta_f = -36\text{cm}$



on remarque que

A.5) $y(x,t) = y(x - \underbrace{c(t-t_1)}_{\text{distance parcourue en } \Delta t = t-t_1 \text{ (si } t_1<t)}, t_1)$

on en déduit

$y(x,t) = y(x - ct + ct_1, t_1)$

donc $\boxed{\beta = ct_1}$

en prenant $t_1 = 0$: $y(x,t) = y(x-ct, 0)$

donc $\boxed{y(x,t) = y(x-ct)}$

<u>L'onde est donc progressive</u>

Partie B

B.1) $\boxed{y_r(x,t) = Y_m \cos(\omega t + Kx + \varphi_r)}$ car le sens de propagation est différent

B.2)

$$Y_{tot}(x,t) = Y_m \cos(\underbrace{\omega t - Kx + \varphi_i}_{b}) + Y_m \cos(\underbrace{\omega t + Kx + \varphi_r}_{a})$$

or $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ avec $\frac{a+b}{2} = \omega t + \frac{\varphi_i + \varphi_r}{2}$

$\frac{a-b}{2} = Kx + \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}$

$$\boxed{Y_{tot}(x,t) = 2Y_m \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_i + \varphi_r}{2}\right)\cos\left(Kx + \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}\right)}$$

c'est une onde stationnaire car de la forme f(t)g(x)

Par identificat°

$$A = 2Y_m, \quad \psi = \frac{\varphi_i + \varphi_r}{2}, \quad \theta = \frac{\varphi_r - \varphi_i}{2}$$

B.3) $Y_{tot}(0,t) \overset{\forall t}{=} 0 \Leftrightarrow A\cos(\omega t + \psi)\cos(\theta) = 0 \quad \forall t$ or $\exists t$ tq $A\cos(\omega t+\psi) \neq 0$

donc

$\Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \underset{\uparrow \, \frac{\Delta\varphi}{2}}{\theta} = \frac{\pi}{2} + p\pi \;\; p\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + p\pi \;\; p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underline{\Delta\varphi = 2\pi p + \pi \;\; p\in\mathbb{Z}}$

B.4) $y_{tot}(-\ell, t) = 0 \;\; \forall t \Leftrightarrow A\cos(\omega t + \psi)\cos(-K\ell + \theta) = 0 \;\; \forall t$

$\exists t$ tel que $\cos(\omega t + \ell) \neq 0$ et $A \neq 0 \Rightarrow \cos(-K\ell + \theta) = 0 \;\; \forall t$.

or $\theta = \frac{\pi}{2} + p\pi \Leftrightarrow \cos(-K\ell + \theta) = \pm\sin(K\ell)$

$\Rightarrow \sin(K\ell) = 0 \Leftrightarrow K\ell = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{K_n = \frac{n\pi}{\ell}, \; n \in \mathbb{N}^*}$$

K ne peut prendre qu'un nombre discret de valeur (quantifié par n)

B.5) $\omega_n = 2\pi f_n = K_n c$

$$f_n = \frac{K_n c}{2\pi} \Leftrightarrow \boxed{f_n = \frac{n \times c}{2L} \quad n\in\mathbb{N}^*}$$

$\lambda_n = \frac{c}{f_n}$

$$\boxed{\omega_n = \frac{\pi c n}{L} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

B.6) $\underset{\uparrow \text{ fondamentale}}{f_1} = 140\,Hz$ | si $L = 25\,cm$ $\boxed{f_1' = 2f_1 = 280\,Hz}$

B.7)

$$y_n(x,t) = A\cos(\omega_n t + \varphi_n)\cos(K_n x + \theta)$$

or $\cos(K_n x + \theta) = \pm \sin(K_n x) = \pm \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

et $\omega_n = n\omega_1$

donc $y_n(x,t) = \underbrace{\pm A}_{Y_0}\cos(n\times\omega_1 t + \varphi_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

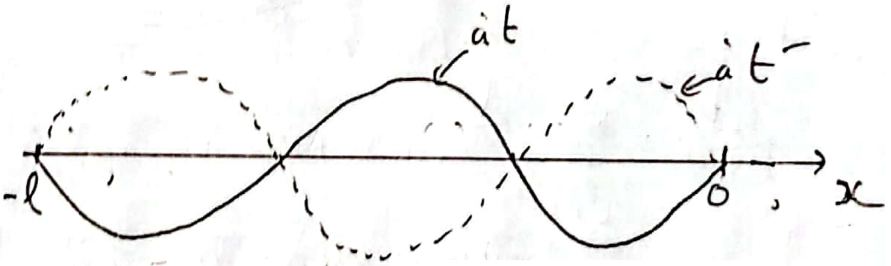
bien de la forme attendue

B.8)

$$Y_3(x,t) = Y_0\cos(3\omega_1 t)\sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right)$$

à $t = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \cos(3\omega_1 t) = \cos(6\pi) = 1 \Rightarrow Y_3(x,t) = Y_0\sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right)$

à $t' = \frac{3\pi}{\omega_1} \Rightarrow \underbrace{\cos(3\omega_1 t')}_{\cos(9\pi)} = -1 \Rightarrow Y_3(x,t') = -Y_0\sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right)$



B.9) il y a n ventres et n+1 noeuds

Problème 2

Q1) Les sources sont synchrones si elles ont la même fréquence

Q2) $I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow I = 2I_0(1+\cos(\Delta\phi))$

Q3) I est max si $\cos(\Delta\phi) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\Delta\phi = 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}}$

Q4) $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2z(t) \Rightarrow$ quand I est max $2\pi p = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2z_p(t)$

$$\Rightarrow \boxed{z_p(t) = \frac{\lambda_0 p}{2},\ p \in \mathbb{Z}}$$

Q5) système : {cube de masse m} réf : Terrestre supposé galiléen avec (Oz) vers le bas

Bilan des forces : $\rightarrow \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e_z}$

Principe fondamental de la dynamique

projeté sur $\vec{e_z}$: $m\ddot{z} = mg \Rightarrow \ddot{z} = g$

on primitive 2 fois : $z(t) = g\frac{t^2}{2} + v_0 t + z_0 \Rightarrow \boxed{z(t) = \frac{1}{2}gt^2}$

$v_0 = 0$, $z_0 = 0$ (énoncé)

quand I est max $z_p(t_p) = \frac{\lambda_0 p}{2} = \frac{1}{2}g t_p^2 \Rightarrow t_p^2 = \frac{\lambda_0 p}{g}$

$$\boxed{t_p = \sqrt{\frac{\lambda_0 p}{g}}}$$ $p \in \mathbb{N}$ (pour définir $\sqrt{\ }$)

Q6) l'intensité est max à $t_0 = 0$, $t_1 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{g}}$, $t_2 = \sqrt{\frac{2\lambda_0}{g}}$, ...

l'écart entre 2 instants où I est max est de plus en plus court car la vitesse augmente

Q7) $t_{10} \simeq 0{,}81\text{ ms} = \sqrt{\frac{10\lambda_0}{g}} \Rightarrow g = \frac{10\lambda_0}{t_{10}^2}$

A.N $g = \frac{10 \times 638\ 10^{-9}}{(0{,}81 \times 10^{-3})^2} \simeq \underline{9{,}7\ m/s}$

Problème 3

A.1)

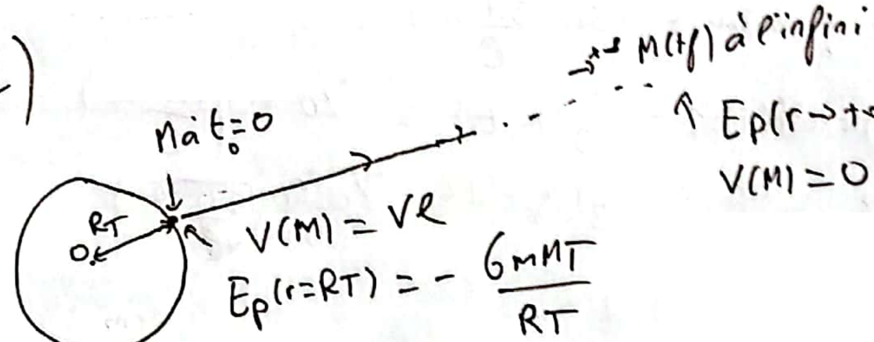
$\vec{F}_{T/satellite}(M) = -\frac{G m M_T}{r^2}\vec{e_r}$ force conservative $\Rightarrow \delta W(\vec{F_G}) = -dE_{p_{grav}}(r)$

$$\delta W(\vec{F_G}(M)) = \vec{F_G}(M)\cdot \underbrace{d\vec{OM}}_{(dr\vec{e_r}+\dots\vec{e_\theta}+\dots\vec{e_z})} = -\frac{G m M_T}{r^2}dr$$

$$-\frac{G m M_T}{r^2}dr = -dE_{p_{grav}} \Rightarrow \frac{dE_{p_{grav}}}{dr} = \frac{G m M_T}{r^2} \Rightarrow E_{p_{grav}}(r) = -\frac{G m M_T}{r} + K$$

si $E_{p_{grav}}(r \to +\infty) = 0 \Leftrightarrow K = 0 \Rightarrow \boxed{E_{p_{grav}}(r) = -\frac{G m M_T}{r}}$

A.2)



$Ep(r \to +\infty) = 0$

$V(M) = 0$

$V(M) = v_e$

$Ep(r = R_T) = -\frac{G m M_T}{R_T}$

le système subit seulement des forces conservatives

donc $E_m = cste \Leftrightarrow \Delta E_{m\,M(t_0)\to M(t_f)} = 0$

TEM

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vitesse nulle à } \infty}}{0^2} + \underset{\substack{0\\ \text{nulle à } \infty}}{E_{p_{grav}}(r \to \infty)} = \frac{1}{2} m v_e^2 + E_{p_{grav}}(R_T)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G m M_T}{R_T}$$

$$\Leftrightarrow v_e^2 = \frac{2 G M_T}{R_T}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}}$$

A.3) A.N: $\boxed{v_e = 11{,}2 \text{ km/s}}$

Partie B

$$E_{peff}(r) = \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{E_{p1}(r)} + \underbrace{\left(-\frac{GM_T m}{r}\right)}_{E_{pgrav}(r)}$$

on sait que $\vec{F_1} = -\frac{dE_{p1}}{dr}\vec{e_r}$

$\vec{F_2} = -\frac{dE_{pgrav}}{dr}\vec{e_r}$

↑

c'est la force gravitationnelle qui est attractive

Par contre

$$\vec{F_1} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right)\vec{e_r} = +\overbrace{\frac{L^2}{mr^3}}^{>0}\vec{e_r}$$ m sens que $\vec{e_r}$

$M_T \cdots\cdots M \rightarrow \vec{e_r}$

$\vec{F_1}$ ← répulsive

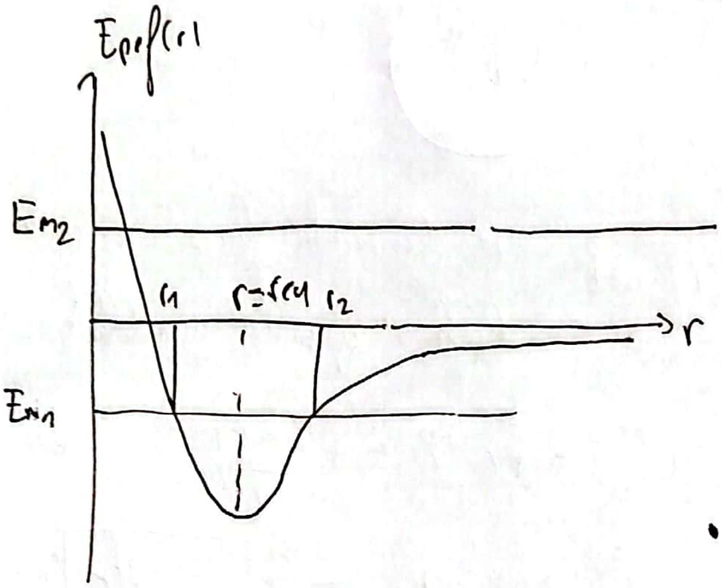
$E_{p1}(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$ associé à une **force répulsive**

B.2) à l'équilibre $E_{p_{ef}}(r=r_{eq})$ est extrémale $\Leftrightarrow \frac{dE_{p_{ef}}(r=r_{eq})}{dr}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GM_Tm}{r}\right)_{(r=r_{eq})}=0 \Leftrightarrow -\frac{L^2}{m r_{eq}^3}+\frac{GmM_T}{r_{eq}^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{GmM_T}{r_{eq}^2}=\frac{L^2}{m r_{eq}^3} \Leftrightarrow \boxed{r_{eq}=\frac{L^2}{Gm^2M_T}}$$

B.3)



- si $E_m = E_{m_1}$ le mouvement est borné entre $r=r_1$ et $r=r_2$ (mouvement elliptique) état lié
- si $E_m = E_{m_2}$ le sattelite peut aller à l'infini (état de diffusion)

B.4) si on déplace légerement un système de la position d'équilibre stable, il tend à y revenir.
cela correspond à un minimum de $E_{pef}(r)$

sur le graphique:
$r=r_{eq}$ est bien une position d'équilibre stable car un minimum de $E_{pef}(r)$