Lycée Jean Perrin

Filière PCSI

Samedi 8 mars 2025

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE N°5

superpositions d'onde , approche énergétique du mouvement, mouvement de particules chargées

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est autorisé.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

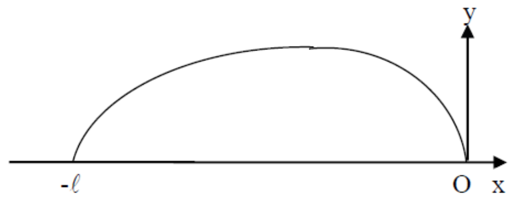
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous semblent pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

PROBLÈME I – Ondes sur une corde de guitare

Partie A – Propagation d'une onde dans une corde de guitare

On assimile la corde de guitare à une corde de masse linéique constante μ, tendue par une tension de module T_0. Au repos, elle se confond avec l'axe (Ox). On note ℓ la longueur de la corde au repos (**ℓ =50 cm)** placée entre les abscisses x = **-** ℓ et x = 0 où la corde est fixée. On étudie les vibrations de la corde dans le plan (Oxy), c'est-à-dire les petits mouvements transversaux selon (Oy), de part et d'autre de cette position de repos. On note y(x,t) l'élongation transverse de la corde au point d'abscisse x.

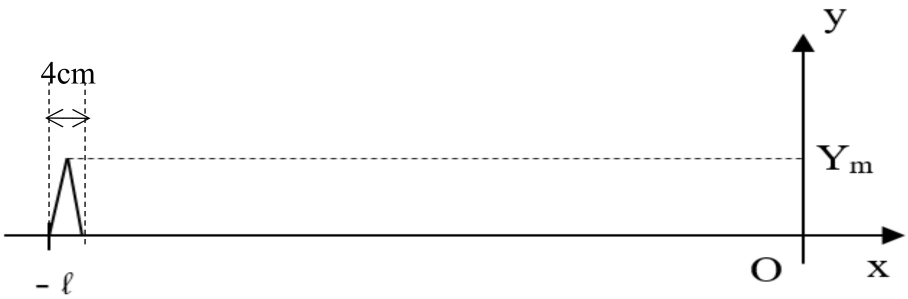


A1. Quelles sont les valeurs de y(x,t) aux extrémités de la corde (conditions aux limites)?

A2. *Montrer à l'aide d'une analyse dimensionnelle que la célérité c d'une onde sur la corde* en fonction de sa tension T_0 et sa masse linéique μ (en kg/m) a pour expression $c=k\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ avec k un coefficient sans dimension qu'on prendra égale à 1 pour la suite

A.3 Calculer c pour T_0 = 118 N et μ = 6,00 g.m^{-1}.

*A t=0, on pince la corde en son extrémité gauche (*x = - ℓ*).* On admet que la corde a l'allure suivante (on prendra la largeur de l'impulsion égale à 4cm) :



A.4. Représenter sur votre copie l'une au-dessus de l'autre, en supposant que l'onde ne s'atténue pas ni ne se déforme au cours de sa propagation, et en respectant une échelle de 1 cm pour 10 cm de corde, l'allure de la corde aux temps t_0=0 s et t_1=1 ms, Justifier le tracé

A.5. Vérifier que y(x,t) peut se mettre sous la forme y(x,t) = y(x-ct+β, t_1), où β est une constante que l'on déterminera. Comment qualifie-t-on une telle onde ?

Partie B – Ondes stationnaires

On suppose que la corde précédente **est fixée à ses deux extrémités**. On laisse l'onde se réfléchir en x=0. On admet que cette réflexion ne s'accompagne d'aucun amortissement. On peut montrer que le signal incident peut se mettre sous la forme :

$$y(x, t)= Y_m\cos(\omega t-kx+\varphi_i)$$

B.1. Donner la forme générale du signal réfléchi que l'on appellera $y_r(x, t)$. On introduira une phase φ_r. On supposera que l'amplitude de l'onde réfléchi est identique à celle de l'onde incidente.

B.2. On note y_{tot} l'élongation totale $y_{tot}(x,t) = y(x,t) + y_r(x,t)$. Mettre l'élongation totale $y_{tot}(x,t)$ sous la forme d'un produit de deux fonctions sinusoïdales $y_{tot}(x,t)=A\cos(\omega t+\psi)\cos(k x+\theta)$ avec A,ψ et θ à exprimer en fonction de Y_m , φ_r et φ_i .

Comment s'appelle une telle onde ? Justifier.

B.3. En utilisant une condition aux limites**, M**ontrer que le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_r - \varphi_i$ entre les phases à l'origine des deux signaux incident et réfléchi est alors égal à $\pi + 2p\pi$ avec $p\in Z$.

B.4. En utilisant l'autre condition aux limites, Montrer que la grandeur k ne peut prendre qu'un nombre discret de valeurs à préciser.

B.5. En déduire les expressions de la fréquence (notée f_n), la pulsation (notée ω_n) et la longueur d'onde (notée λ_n) associées à k_n en fonction de n, ℓ et éventuellement c.

B.6. Calculer la fréquence fondamentale pour c= 140 m s^{-1} et $\ell = 50$ cm . Comment est modifié cette fréquence si on diviser par deux la longueur de la corde ?

B.7 Montrer que l'onde harmonique de pulsation ω_n a une expression de la forme : $y_n(x,t)=Y_0\cos(n\omega_1 t+\psi_n)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$.

B.8. Pour cette question, on prendra ψ_n=0 pour simplifier et $Y_0>0$.

Dessiner l'allure de la corde à $t=\frac{2\pi}{\omega_n}$ et $t'=\frac{3\pi}{\omega_n}$, pour n=3.

On représentera sur le même graphe, pour un n fixé, la corde aux deux temps demandés.

B.9. Quel est le nombre de ventres et de nœuds pour un mode de vibration n quelconque ?

PROBLÈME II – Approche énergétique du mouvement d'un satellite

Les parties A et B sont totalement indépendantes.

Partie A – Théorème du Viriel et vitesse de libération

Pour libérer un satellite M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le "lancer" vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_ℓ est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géo-centrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il "s'échappe".

On rappelle l'expression de la norme de la force gravitationnelle d'interaction entre deux objets de masse m_A et m_B séparés d'une distance r : $\|\vec{F}_{grav}(r)\| = G\dfrac{M_A M_B}{r^2}$

A-1 Démontrer que l'énergie potentielle gravitationnelle d'interaction entre la Terre de masse M_T et le satellite de masse m placé à une distance r du centre de la Terre a pour expression :

$E_{pgrav}(r) = -G\dfrac{M_T m}{r}$ si on suppose qu $E_p(r \to \infty)=0$.

A-2 On néglige l'influence de l'atmosphère et de toutes forces non conservative dans cette question
En appliquant le théorème de l'énergie mécanique au satellite M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre et vitesse v_ℓ) et l'instant final (M à l'infini à la vitesse nulle), déterminer la vitesse de libération v_ℓ .
(Faire un schéma en supposant que la trajectoire est rectiligne)

A-3. Calculer numériquement v_ℓ

Données : constante universelle de gravitation G = 6,67 10^{-11} S.I
Masse de la Terre M_T =5,972 × 10^{24} kg
Rayon de la Terre R_T = 6370 km

On considère maintenant le satellite M de masse m **en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre** (de centre O, de masse M_T et de rayon R_T) . Il se trouve à l'altitude h telle que r = h + R_T. On se place dans le référentiel géocentrique. On appelle v la norme de la vitesse du satellite ($v=\|\vec{v}\|$).

A-4. Établir l'expression de l'accélération du satellite en fonction de v, r , $\dfrac{dv}{dt}$ et de vecteurs unitaires à définir sur un schéma

A.5. Montrer, en utilisant le Théorème de l'énergie cinétique sous forme puissance (théorème de la puissance cinétique) , que le mouvement du satellite est uniforme.

A-6. En utilisant le principe fondamental de la dynamique on pourrait montrer que $v=\sqrt{G\dfrac{M_T}{r}}$. En déduire le théorème du Viriel : $2\,E_c(r)+E_{pgrav}(r)=0$.

Partie B – Cas d'un mouvement elliptique

Dans le cas d'un mouvement elliptique le rayon r peut varier au cours de la trajectoire

on le note r(t) . Dans ce cas tout se passe comme si le satellite possédait une énergie potentielle effective :

$$E_{pef}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{G M_T m}{r}$$

L'équation du mouvement projetée sur $\vec{e}_r$ s'écrit alors $m\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{d\,E_{pef}}{dr}$

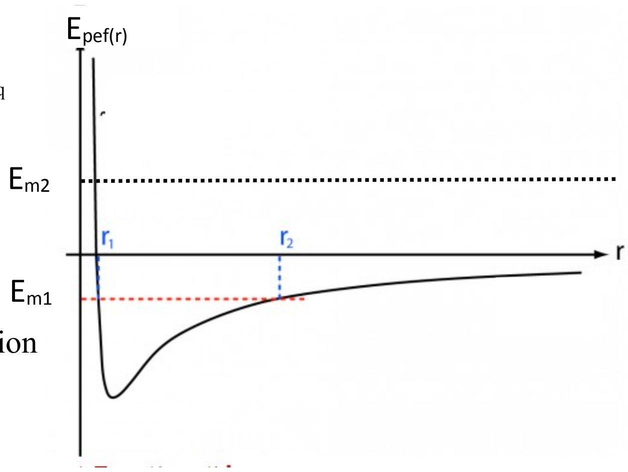
B.1. Indiquer si chacun des termes de l'énergie potentielle effective correspond à une force attractive ou répulsive.

B.2 Détermine l'expression de la position d'équilibre r_{eq} en fonction de L ,m, G ,M_T

$E_{pef}(r)$ à l'allure ci-contre

B.3 Reproduire la courbe sur votre copie et indiquer r_{eq}

Expliquer la nature du mouvement dans le cas où l'énergie mécanique vaut E_{m1} et si elle vaut E_{m2}

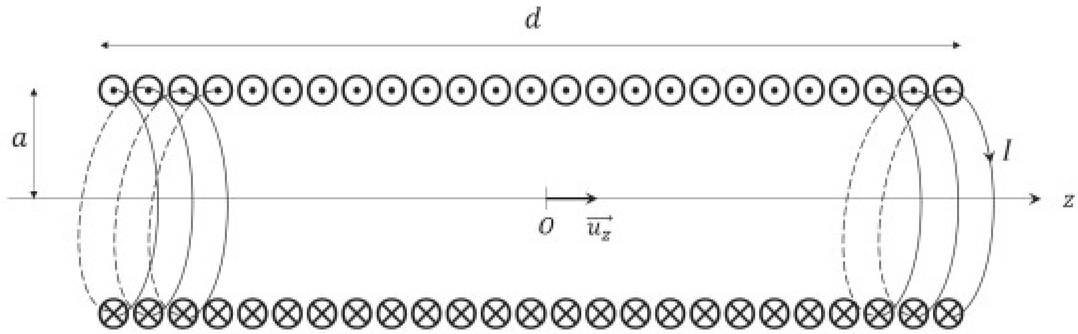


B.4 Définir une position d'équilibre stable. La position d'équilibre $r=r_{eq}$ est-elle stable d'après la courbe ?

PROBLÈME III – Confinement magnétique d'un plasma

Les plasmas créés pour réaliser la fusion thermonucléaire ayant des températures extrêmement élevées, ceux-ci ne peuvent être au contact direct de la paroi du réacteur qui fondrait ou serait fortement endommagée. Pour contenir ces plasmas, on doit donc réaliser un confinement immatériel : la méthode la plus étudiée à ce jour est le confinement magnétique. On se propose dans cette partie d'en comprendre le principe par l'étude du mouvement d'une unique particule chargée au sein du plasma : un cation de masse m et de charge électrique e (le cas d 'un électron se traitant de manière similaire). On supposera que seule la force magnétique agit sur le cation et qu'aucune collision n'a lieu avec les autres espèces présentes dans le plasma.

Le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma est créé par un solénoïde (Oz); orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$



Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est de la forme $\vec{B}=B_0\vec{u}_z$

Q1. Montrer que la puissance de la force magnétique est nulle. En déduire que l'énergie cinétique du cation se conserve. Par la suite, on notera v_0, la norme constante de la vitesse du cation au cours de son mouvement.

On suppose d'abord que le cation a un mouvement circulaire de rayon R dans un plan perpendiculaire au champ magnétique

Q2. Représenter sur un schéma le vecteur vitesse $\vec{v}=v_0\vec{e}_x$ du cation, le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la feuille et la force magnétique initiale $\vec{F}_{mag\,0.}$ Esquisser la courbure de la trajectoire puis représenter les vecteurs unitaires du repère des coordonnées polaires.(on introduira aussi le centre C de la trajectoire qui n'est pas le point de départ du cation)

Q3. Donner l'expression de l'accélération du cation dans le système de coordonnées polaires en fonction de sa vitesse v , et du rayon de courbure R de la trajectoire.

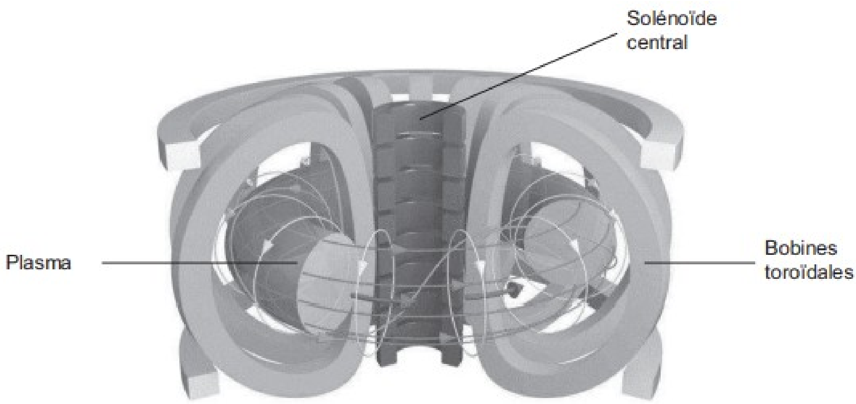
Q4 Montrer que le rayon de la trajectoire, appelé rayon de Larmor, a pour expression $R=\frac{v_0}{\omega_c}$ avec ω_c la pulsation cyclotron à exprimer en fonction des paramètres. On remarquera que $\vec{v}=-v_0\vec{e}_\theta$ à cause du sens de rotation.

On suppose maintenant que le cation possède une vitesse initiale $\vec{v}_0$ parallèle au champ magnétique

Q5 En projetant le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{u}_z$, montrer que la composante v_z de la vitesse du cation selon $\vec{u}_z$ est constante. En déduire que le mouvement est rectiligne. Peut-on affirmer que le cation est confiné ?

Pour une vitesse initiale quelconque du cation, le mouvement est une combinaison du mouvement circulaire perpendiculaire au champ magnétique et du mouvement rectiligne parallèle au champ magnétique : la trajectoire est alors hélicoïdale.

Actuellement, la majorité des recherches sur le confinement magnétique portent sur les tokamaks, pour lesquels les bobines produisant le champ magnétique ne forment pas un cylindre (comme pour le solénoïde) mais un tore (figure ci-contre), qui est un cylindre refermé sur lui-même. Le confinement magnétique du plasma est donc assuré par les bobines toroïdales



Q6 Calculer le rayon de Larmor d'un cation d'hélium (masse $m=6{,}6\cdot10^{-27}$ kg et charge q= 2 e = $3{,}2\ 10^{-19}$ C) de vitesse $v_0 = 3\cdot10^5\ m\cdot s^{-1}$ dans le tokamak d'ITER produisant un champ magnétique $B_0 = 12$ T.

Commenter, sachant que les rayons internes des bobines toroïdales sont de 2 m à l'horizontale et de 3,4 m à la verticale.