TP17-Étude numérique des variations de pression et de température dans l'atmosphère

Objectif : à l'aide d'un langage de programmation, étudier les variations de température et de pression dans l'atmosphère.

Précédemment, nous avons vu la méthode d'Euler explicite pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1. Cette méthode n'est cependant pas toujours fiable. Nous allons ici utiliser la fonction odeint, de la librairie scipy.integrate. Elle permet de résoudre des équations différentielles de manière fiable et rapide.

Partie A Résolution d'une équation de la forme $\frac{dy}{dt}+ay=b$

1) Exemple d'utilisation

→ Ouvrir l'algorithme **exemple1.py** (sur cahier de prépa **dans le répertoire TP puis TP17 atmosphère**)
Odeint prend un argument une fonction F(y,t) qui renvoie la valeur de **la dérivée de y à l'instant t**
Attention, même si F ne dépend pas de t, il faut tout de même que t apparaisse comme second argument : F(y,t).

Dans le cas étudié ici : $F(y,t)=\frac{dy}{dt}=b-ay$

- odeint prend aussi en argument y_ini qui est un nombre qui correspondant à y(t=0)

Le résultat renvoyé par odeint est y_sol qui est une liste qui contient les valeurs de y aux différentes instants
On peut ensuite tracer ysol en fonction du temps pas
Q1 : Exécuter l'algorithme

2) Application à l'évolution de la pression avec l'altitude dans l'atmosphère isotherme

On rappel que pour une atmosphère isotherme l'équation différentielle vérifiée par la pression est

$\frac{dP}{dz}+P(z)\frac{M_{air}g}{RT}=0$ avec T la température en Kelvin supposée constante

La température à prendre en compte dans le calcul n'est pas évidente à définir car en réalité la température évolue avec l'altitude comme on peut le voir sur le document ci-dessous

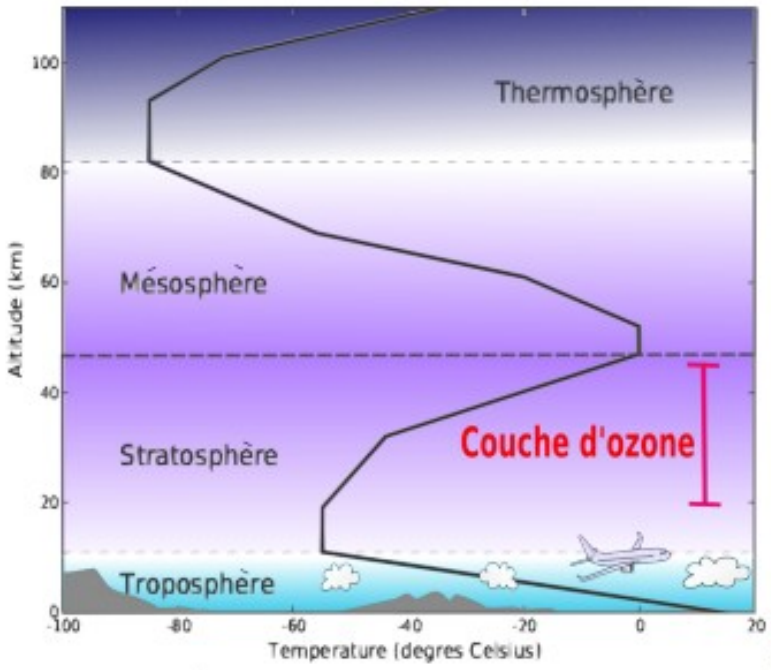

Figure . 1 Évolution de la température dans les différentes couches de l'atmosphère

Couche atmosphérique	Altitude	Gradient de température
Troposphère	0 à 11 km	- 6,5 K.km^{-1}
Tropopause	11 à 20 km	0
Stratosphère	20 à 32 km	1 K.km^{-1}
Stratosphère	32 à 47 km	2,8 K.km^{-1}
Stratopause	47 à 51 km	0 K.km^{-1}
Mésosphère	51 à 71 km	- 2,8 K.km^{-1}
Mésosphère	71 à 85 km	- 2,0 K.km^{-1}

Tableau 1: Gradient de température en fonction de l'altitude dans l'atmosphère (extrait de la norme ISO 2533:1975)

Q2 À l'aide du document déterminer :
-La température T_0 (en Kelvin) au niveau du sol Rappel T (en K) = θ (en °C) + 273,15
-La température T_1 (en Kelvin) au sommet de la troposphère
-La température moyenne dans la troposphère T_m
-l'épaisseur de la troposphère h (en m)

→ Ouvrir le programme **evol_pression.py**
Q3 En vous inspirant de exemple1.py , compléter le programme (notamment la fonction F_pression , T_1, T_0, T_m et h) pour tracer l'évolution de la pression en fonction de l'altitude dans la troposphère pour les 3 températures précédentes.
On supposera que la pression au niveau de la mer est de 101330 Pa

Attention la variable n'est plus t mais z maintenant

Q4 Déterminer la pression prédite au sommet de L'Everest (z= 8849m) en considérant les 3 températures.
(on écrira une petite boucle pour détermine cette pression)

3) Prise en compte de la variation de température

On va maintenant prendre en compte la variation de la température avec l'altitude
Dans la troposphère on voit d'après le document que T(z) = a z + b
(le gradient du tableau 1 correspond au coefficient directeur a **à convertir**)
on a alors $\frac{dP}{dz}+P(z)\frac{M_{air}g}{R(az+b)}=0$

Q5 Exprimer a et b en fonction de T_0 , T_1 et h la hauteur la troposphère.

Q6 Compléter le programme (la fonction F_pression2) pour tracer l'évolution de la pression en fonction de l'altitude dans la troposphère en considerant la variation de température

On tracera toutes les courbes sur le même graphique (déplacer le plt.show() à la fin de l'algorithme)

Q7 Comparer qualitativement les courbes. Parmi les 3 températures T_0 T_1 et T_M laquelle permet d'avoir le résultat plus proche de l'évolution de pression avec prise en compte de la variation de température? L'écart est il plus important à haute ou basse altitude ?
Q8 En vous aidant du tableau 1 du document, et en rajoutant des conditions if portant sur l'altitude z dans F_pression2 déterminer l'évolution de la pression jusqu'au sommet de la stratosphère (on modifiera h aussi).

Partie B : Résolution d'une équation d'ordre 2 de la forme $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\sin(\theta)=0$

Dans ce cas la fonction odeint a une syntaxe particulière, qui oblige à transformer l'équation d'ordre 2 sur θ, en une équation d'ordre 1 sur le couple $y(t)=\begin{pmatrix}\theta(t)\\ \dot\theta(t)\end{pmatrix}$

On parle parfois de vecteur à deux composantes pour désigner y :
– sa première composante est $y_0 = \theta$
– sa seconde composante est $y_1 = \dot\theta$

y_init est une liste qui contient les valeurs initiales de θ et $\dot\theta$ y_init=[θ_0 , $\dot\theta_0$]
elle correspond au vecteur $y\_init = y(0)=\begin{pmatrix}\theta(0)\\ \dot\theta(0)\end{pmatrix}$

en dérivant le couple y par rapport au temps on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dot\theta\\ \ddot\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dot\theta\\ -\omega_0^2\sin\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}y_1\\ -\omega_0^2\sin y_0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On arrive donc à une équation du premier ordre sur y qui permet de définir la fonction F(y,t) comme pour l'exemple précédent:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = F(y) \quad \text{avec} \quad F(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -\omega_0^2 \sin y_0 \end{pmatrix}.}$$

Après exécution de y_sol = sp.odeint(F, y_ini, t), y_sol est une matrice dont :
- la première colonne contient les valeurs de $y_0(t)$ (donc dans notre exemple, de $\theta(t)$)
- la seconde colonne contient les valeurs de y1(t) (donc dans notre exemple, de $\dot{\theta}(t)$

On peut y accéder avec la syntaxe suivante :
theta = y_sol [: ,0] # 1ère colonne de y_sol
theta_prime = y_sol [: ,1] # 2ème colonne de y_sol

→ Lancer le programme **pendule.py**
Q9 modifier la partie paramètres physiques pour qu'il exprimer la pulsation propre d'un pendule pesant de masse m=100 g, de longueur L=50cm et de moment d'inertie J= $mL^2/3$

Q10 Déterminer la période du pendule pour des angles initiaux θ_0 = 40°, 45°, 50° , 60 ° , 65°
Que remarque-t-on ?

Q11 Pour les petits angles la période dépend-elle de l'angle initial ?
Vérifier que c'est bien le cas en modifiant F(y,t) pour quelle correspondent à l'équation aux petites angles :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$