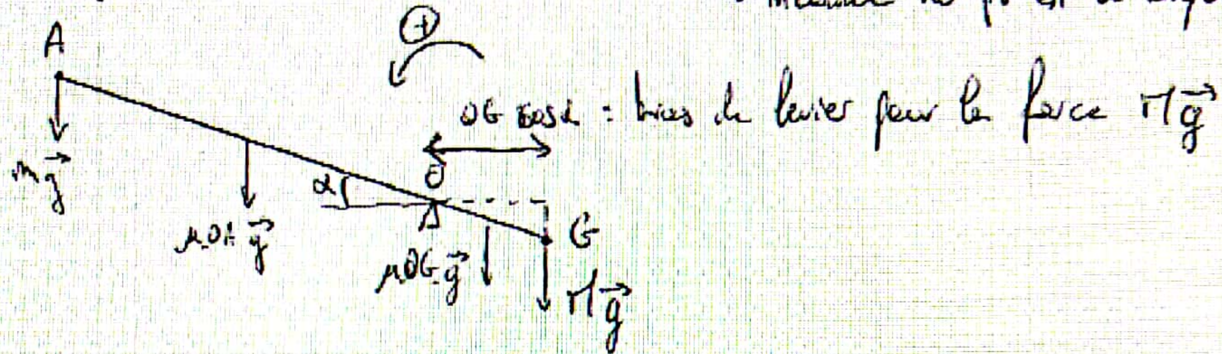
Correction TD17

Exercice 2

l'inconnue du pb est la longueur OA.



Le levier est immobile, à la limite du basculement. On a donc

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$$

Pour exprimer le moment de chacune des forces par rapport à O, on peut utiliser la méthode du bras de levier.
Pour cela, on choisit arbitrairement (car il n'y a pas ici de système d'axes de coordonnées) un sens de rotation positif ⊕.
Ainsi, on a :

$$\underbrace{m g \underbrace{OA\cos\alpha}_{\text{bras de levier}} + \mu OA\, g \underbrace{\frac{OA}{2}\cos\alpha}_{\text{bras de levier}}}_{\text{moments qui tendent à faire tourner dans le sens positif}} \underbrace{- \mu OG\, g \underbrace{\frac{OG}{2}\cos\alpha}_{\text{bras de levier}} - Mg \underbrace{OG\cos\alpha}_{\text{bras de levier}}}_{\text{moments qui tendent à faire tourner dans le sens } \ominus} = 0$$

D'où

$$m\,OA + \frac{\mu}{2}OA^2 - \frac{\mu}{2}OG^2 - M\,OG = 0$$

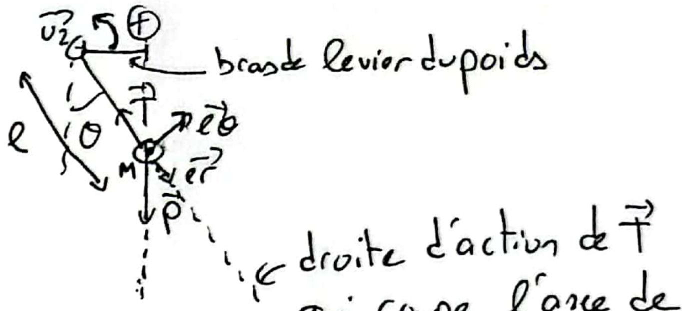
On a donc un polynôme de d° 2 en OA :

$$\left(\frac{\mu}{2}\right)OA^2 + (m)\,OA - \left(\frac{\mu}{2}OG^2 + M.OG\right) = 0$$

La résolution, qui ne présente pas d'intérêt particulier, peut se faire avec la fonction "solveur" d'une calculatrice, on obtient alors : $OA = 25$ m

Il faut donc un levier de longueur $OA + OG = 26$ m

Exercice 3 système {Point M = G}



Bilan des actions mécaniques :

- Poids $\vec{P}$ qui crée un moment /Oz

$$\mathcal{M}_{Oz} = -mg\,\ell\sin\theta$$

- tension $\vec{T}$ qui crée un moment nul /Oz, la droite d'action de $\vec{T}$ coupe l'axe de rotation

TMC appliqué au système : $\frac{d}{dt}(L_{Oz}) = \mathcal{M}_{Oz}$

or $L_{Oz} = \vec{L_O}\cdot\vec{u_z} = (\vec{OM}\wedge\vec{p})\cdot\vec{u_z}$

comme le mvt est circulaire $\vec{OM} = \ell\vec{e_r}$ $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$$L_{Oz} = (\ell\vec{e_r}\wedge m\ell\dot{\theta}\vec{e_\theta})\cdot\vec{u_z} = (\ell^2 m\dot{\theta}\vec{u_z})\cdot\vec{u_z} = m\ell^2\dot{\theta}$$

$$\text{TMC} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = -mg\ell\sin\theta$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

1) $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ si la trajectoire est circulaire $\left| \begin{array}{l} \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \\ \vec{r} = r\vec{e_r} \end{array} \right.$

$$L_{Oz} = \vec{L}\cdot\vec{e_z} = \left(r\vec{e_r}\wedge m r\dot{\theta}\vec{e_\theta}\right)\cdot\vec{e_z} = r^2 m\dot{\theta}\underbrace{\left(\vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta}\right)}_{\vec{e_z}}\cdot\vec{e_z} = r^2 m\dot{\theta}\,\vec{e_z}\cdot\vec{e_z} = \boxed{r^2 m\dot{\theta}} = rmV$$

D'après la deuxième hypothèse $L_{Oz} = n\hbar = r_n^2 m\dot{\theta}_n = r_n m \underbrace{\dot{\theta}_n r_n}_{V_n = r_n\dot{\theta}_n} = r_n V_n m$

ainsi $\boxed{V_n = \frac{n\hbar}{r_n \times m}}$

2) Système : $\{e^-\}$ Réf: TSG Bilan des forces : . ~~Poids~~ → négligeable devant $\vec{F_e}$

. force électrostatique :

$$\vec{F_e} = \frac{q_{e^-}\times q_{noyau}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

Loi de Coulomb

$q_{e^-} = -e$

$q_{noyau} = +e$ ← le noyau est un proton

$$\Rightarrow \vec{F_e} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

PFD: $m\vec{a} = \vec{F_e}$ avec $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{r}\vec{e_r}$

$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{r}\vec{e_r}\right) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

projection sur $\vec{e_r}$:

$$-\frac{mv^2}{\cancel{r}} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^{\cancel{2}}}$$

donc $v^2 = \frac{e^2}{m4\pi\varepsilon_0 r}$. or $v = V_n = \frac{n\hbar}{r_n m}$ et $r = r_n = \frac{n\hbar}{mV_n}$

donc $V_n^2 = \frac{e^2}{\cancel{m}4\pi\varepsilon_0\frac{n\hbar}{\cancel{m}V_n}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\times\frac{1}{n}}$

3) $E_m = E_c + E_{p\,elec}$

$$\delta W(\vec{F_e}) = -dE_{p\,elec} = \vec{F_e}\cdot\underbrace{d\vec{OM}}_{dr\vec{e_r}+rd\theta\vec{e_\theta}+dz\vec{e_z}}$$

↑ $\vec{F_e}$ est conservative

$$E_c = \frac{1}{2}mV_n^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2\times\frac{1}{n^2}$$

$$-dE_{p\,elec} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$\frac{dE_{p\,elec}}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E_{p\,elec} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \underbrace{\cancel{cste}}_{0}$$

$$E_{p\,elec} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}\times mV_n = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n}\times m\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\times\frac{1}{n} = -m\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2\times\frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 \times \frac{1}{n^2}}$$

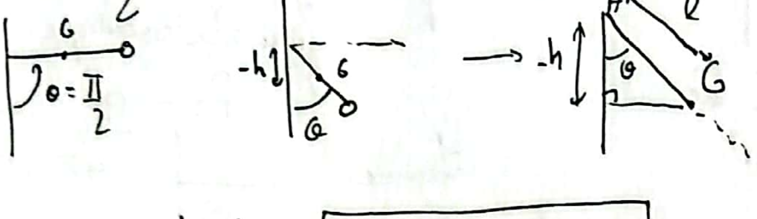
A.N $\frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 = 13{,}6 \times 1{,}6\times10^{-19}$ J $= 13{,}6$ eV

On retrouve le spectre discret de l'atome d'hydrogène

Exercice 5

1) la trajectoire de G est circulaire

2) $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2}$ $E_{pp} = mgz + cste = mgh$ avec h tq $h = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$



$AG = \ell$ si la longueur de la barre est 2ℓ

$-h = \cos\theta \, \ell$

donc $\boxed{E_{pp} = -mg\ell\cos\theta}$

$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$

3) TEM entre position initiale où $\theta_1 = \theta_0$ et $\dot{\theta}_0 = 0$ et position finale où $\theta_2 = 0$ pos verticale, $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_B$

Pas de forces non conservatives

$E_{m1} = E_{m2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \cancel{\dot{\theta}_1^2}^{\,0} - mg\ell\cos\theta_0 = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_2^2 - mg\ell \underbrace{\cos(0)}_{1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_B^2 = mg\ell(1 - \cos\theta_0)$

$\dot{\theta}_B = \sqrt{\frac{2mg\ell(1-\cos\theta_0)}{J_\Delta}}$ or $V_B = 2\ell\dot{\theta}_B = 2\ell\sqrt{\frac{2mg\ell(1-\cos\theta_0)}{J_\Delta}}$

4)

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta\right) = 0 \Leftrightarrow J_\Delta \ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta} mg\ell\sin\theta = 0$ (1)

$\exists t$ tq $\dot{\theta} \neq 0 \underset{\frac{(1)}{\dot{\theta}}}{\Rightarrow} J_\Delta\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$ approx des petits angles : $\sin\theta \simeq \theta$ (dl à l'ordre 1 de $\sin\theta$)

On a donc $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J_\Delta}\theta = 0}$ équat° d'un oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J_\Delta}}$

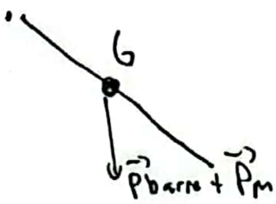
$\theta(t) = \underset{\theta_0}{A}\cos(\omega_0 t) + \underset{0 \text{ car } \dot{\theta}_0 = 0}{B}\sin(\omega_0 t)$

$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$

et période propre

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\ell}{3g}}$ ($J_\Delta = \ldots$)

5)

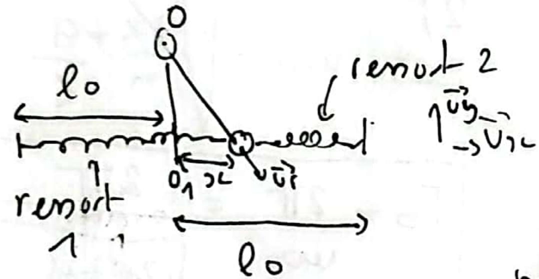


Le centre d'inertie de l'ensemble n'est pas modifié si on ajoute M en G

on a alors $J_{\Delta tot} = J_\Delta + M\ell^2$

et $\boxed{T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_{\Delta tot}}{m_{tot}\, g\, \ell}} \quad \text{avec } m_{tot} = m + M}$

Exercice 6

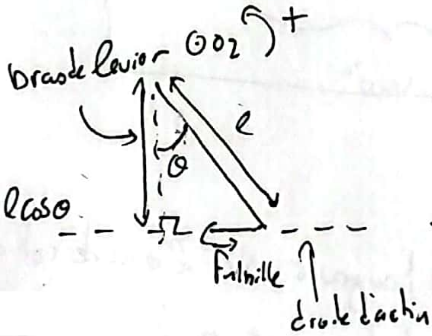


système : {bille M de masse M}

bilan des forces
- $\vec{F}_{1/bille} = -Kx\,\vec{u_x}$ ← force du ressort 1 sur bille
- $\vec{F}_{2/bille} = -Kx\,\vec{u_x}$ ← aussi !
- Poids $\vec{P} = Mg\vec{u_y}$
- Tension $\vec{T} = -T\vec{u_r}$
- actions de liaisons pivot

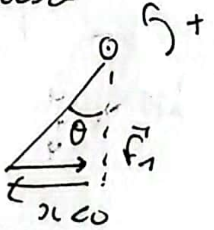
⚠ position du point d'accroche

Moments / O_2 des forces :



- $\mathcal{M}_{O_2}(\vec{F}_{1/bille}) = -\|\vec{F}_{1/bille}\| \times \ell\cos\theta$ ↑ si $x > 0$

$\mathcal{M}_{O_2}(\vec{F}_{1/bille}) = +\|\vec{F}_{1/bille}\|\,\ell\cos\theta$ ↑ si $x < 0$



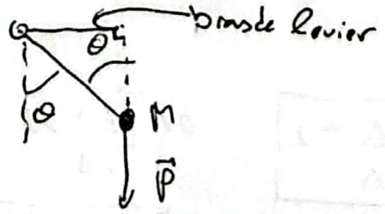
et

$\Rightarrow \mathcal{M}_{O_2}(\vec{F}_{1/bille}) = -Kx\,\ell\cos\theta$

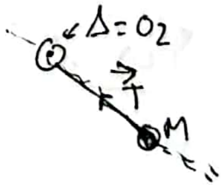
- $\mathcal{M}_{O_2}(\vec{F}_{1/bille}) = \mathcal{M}_{O_2}(\vec{F}_{2/bille}) = \underline{-K\ell^2\theta\cos\theta}$

avec $\tan\theta = \dfrac{x}{\ell} \simeq \theta \Rightarrow x = \ell\theta$

- $\mathcal{M}_{O_2}(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta \simeq -mg\ell\theta$ petits angles



- $\mathcal{M}_{O_2}(\vec{T}) = 0$ la droite d'action de $\vec{T}$ coupe Δ



$\mathcal{M}_{O_2}(\text{Action de liaison}) = 0$ (pivot parfait)

TMC appliqué au système ds le réf terrestre galiléen :

$$\frac{d}{dt}(L_{O_2}) = \sum \mathcal{M}_{O_2}(\vec{F}_{ext}) \quad \text{avec } L_{O_2} = (\vec{OM} \wedge \vec{p})\cdot\vec{u_z} = \underline{m\ell^2\dot{\theta}}$$

TMC :

$$\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\dot{\theta}\right) = -2K\ell^2\theta\cos\theta - mg\ell\theta + 0 + 0$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -2K\ell^2\theta\cos\theta - mg\ell\theta$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2K\ell^2\cos\theta + mg\ell}{m\ell^2}\right)\theta = 0$$

Si on suppose $\cos\theta \simeq 1$ dL1 de $\cos\theta$

alors $$\boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{2K}{m} + \frac{g}{\ell}\right)}_{\omega_0^2}\theta = 0}$$

2) $\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{m} + \frac{g}{\ell}}$

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2K}{m} + \frac{g}{\ell}}}}$$

Exercice 7

1) le centre de gravité est toujours sur l'axe de rotation $\forall t$ donc le moment du poids est toujours nul + liaison pivot parfaite + pas de frottements de l'air

et donc d'après le TMC $\frac{d}{dt}(L_\Delta) = 0 = \Sigma M_\Delta(\vec{F}_{ext})$

donc $\boxed{L_\Delta = cste}$

2) si les altères sont loin de l'axe de rotation le moment d'inertie est plus important $J_\Delta = \Sigma r_i^2 m_i$

ainsi $J_{2\Delta} > J_{1\Delta}$

3) $L_\Delta = cste \Leftrightarrow J_{1\Delta}\underbrace{\dot{\theta}_1}_{\omega_1} = J_{2\Delta}\underbrace{\dot{\theta}_2}_{\omega_2} \Leftrightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{J_{2\Delta}}{J_{1\Delta}}\omega_2}$ or $\frac{J_{2\Delta}}{J_{1\Delta}} > 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\omega_1 > \omega_2}$

4) TEC

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}J_{2\Delta}\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_{1\Delta}\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_{2\Delta}\left(\frac{J_{1\Delta}}{J_{2\Delta}}\omega_1\right)^2 - \frac{1}{2}J_{1\Delta}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\omega_1^2 J_{1\Delta}\underbrace{\left(\frac{J_{1\Delta}}{J_{2\Delta}} - 1\right)}_{<0}$$

$\Delta E_c < 0$ 5) TEM $\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(f_{int}) + \cancel{\mathcal{P}(f_{ext})}^{0}$ Pas nul !

Exercice 8

1) si $M_s > 0$ (moteur)

M_u est négatif car c'est un couple de freinage

2) Système : {rotor + partie utile}

BAME : M_s

M_U

$M_f = -\alpha w$

$M(\vec{P}) = 0$ car par hypothèse le centre d'inertie est sur l'axe de rotation car la répartition de masse est centrée sur l'axe de rotation

$M(\text{action liaison}) = 0$ (liaison parfaite)

TMC : $J\ddot{\theta} = M_s + M_u + M_f \Leftrightarrow \boxed{J\frac{dw}{dt} = M_s + M_u - \alpha w}$

3) $w(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\alpha}(M_s + M_u)$

avec $\boxed{\tau = \frac{J}{\alpha}}$

à $t=0$ $w(0) = 0 \Leftrightarrow A + \frac{1}{\alpha}(M_s + M_u) = 0$

$A = -\frac{1}{\alpha}(M_s + M_u) \Rightarrow w(t) = \frac{1}{\alpha}(M_s + M_u)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

4) en régime permanent

$w = cste \Rightarrow \boxed{w_p = \frac{1}{\alpha}(M_s + M_u)}$ oui cela dépend de α

$t \to +\infty$

$e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$

plus $\alpha \nearrow$ plus $w_p \searrow$ (logique !)

on a aussi $\tau = \frac{J}{\alpha}$ si $\alpha \nearrow$ $\tau \searrow$ $\leftarrow$ le moteur atteint plus rapidement le régime permanent (5τ)

si $w_p > 0$ $\boxed{M_s > -M_u}$ (logique)

5) $\mathcal{P} = M_s \times \dot{\theta}$

on cherche M_s ...

$\dot{\theta} = 7$ tours/s $= 7 \times 2\pi$ rad/s

1 tour $\rightarrow 2\pi$ rad

$\mathcal{P} = 180 \times 736$ W

$$\boxed{M_s = \frac{180 \times 736}{7 \times 2\pi} = 3\,10^3 \text{ Nm (J)}}$$