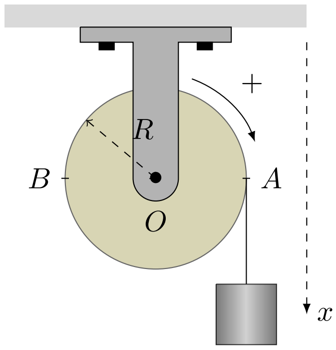
TD 16 - Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Exercice 1 : Étude d'une poulie (**)

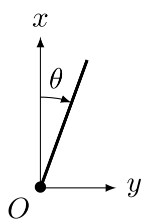
Une masse $m = 5,0$ kg est suspendue à l'extrémité d'une corde, de masse négligeable, enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1,0$ kg et de rayon $R = 10$ cm en liaison pivot idéale autour de son axe avec un support fixe. On prendra $g = 10$ m.s^{-2} et le moment d'inertie de la poulie rapport à son axe de rotation vaut $J_{Oz} = \frac{1}{2}m_pR^2$.



1. On suppose que la poulie est en rotation uniforme autour de son axe fixe Oz à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Déterminer la vitesse de la masse m.
2. On reprend la même poulie mais, maintenant, elle est retenue par un opérateur qui exerce une force verticale au point B. Quelle force doit exercer l'opérateur sur la poulie afin de l'empêcher de tourner ?
3. Déterminer l'accélération angulaire de la poulie, l'accélération linéaire de la masse m et la tension de la corde lorsque l'opérateur lâche la poulie à $t = 0$.

Exercice 2 : Chute d'un arbre (*)

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $J_{Oz} = \frac{1}{3}mL^2$.



1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}$.
3. Montrer que cette relation peut-être écrite sous la forme :

$$\sqrt{\frac{3g}{L}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$

.

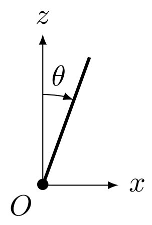
4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.

On donne pour $\theta_0 = 5°$:

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5,1$$

Exercice 3 : Gravimètre de Holweck-Lejay (***)

Une tige métallique homogène (masse m, longueur l, moment d'inertie $J_{Oy} = ml^2/3$) est en pivot parfait autour de $\Delta = (O, \overrightarrow{e_y})$. Elle subit un couple de torsion $\mathcal{C} = -C\theta$, où θ est l'angle entre la tige et la verticale. On admet que ce couple dérive de l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$. On posera $\eta = \frac{2C}{mgl}$



1. Expliquer qualitativement le problème et détailler les actions agissant sur la tige.

2. Montrer que la recherche des positions d'équilibre amènent à l'équation suivante :

$$\sin\theta_{eq} = \eta\theta_{eq}$$

3. $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre ? Est-ce la seule (on pourra discuter graphiquement) ? Quelle est la stabilité de l'équilibre $\theta = 0$?

4. Calculer la période des petites oscillations autour de O en fonction de η, m, l et C. On optera pour une approche énergétique.

5. On note ΔT la variation de période si g varie de Δg. En assimilant ΔT à une variation infinitésimale dT, montrer que la variation relative de la période s'écrit :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m\Delta gl}{4C}\frac{1}{1-1/\eta}$$

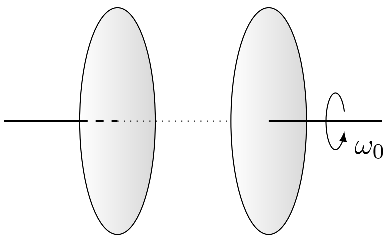
On s'aidera de la relation suivante :

$$\mathrm{d}\ln T = \frac{\mathrm{d}T}{T}$$

6. Comparer à un pendule simple et commenter. Quelles valeurs de η doit-on prendre pour avoir la meilleure sensibilité pour une mesure du champ de pesanteur ? Quel problème peut-on rencontrer ?

Exercice 4 : Entraînement par frottements (**)

On considère le système de deux disques en rotation de la figure ci-dessous. Les deux disques (de moments d'inertie J_1 et J_2) sont en liaison pivot parfaite sur l'axe de rotation $\overrightarrow{e_z}$. Le second disque a une vitesse angulaire initiale ω_0, alors que le premier est immobile. On translate lentement les disques le long de l'axe jusqu'à ce qu'ils rentrent en contact.



1. En utilisant le théorème du moment cinétique scalaire, calculer les vitesses angulaires finales des deux disques. Comment l'intensité des frottements intervient-elle ?

2. Faire un bilan d'énergie pour chaque disque séparément.

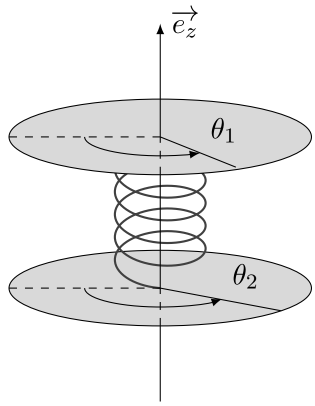
3. Faire un bilan d'énergie pour le système total.

4. Commenter les résultats.

Exercice 5 : Disques couplés par torsion (***)

Cet exercice est très mathématique. Seule la question **1.** demande une approche physique...

Deux disques sont libres en rotation autour de l'axe Oz. Leurs moments d'inertie par rapport à cet axe valent respectivement J_1 et J_2. Ils sont liés par un fil de torsion, de constante C et de masse négligeable, c'est-à-dire que l'action exercée par l'un sur l'autre est un couple, de valeur proportionnelle à l'écart entre leurs angles (repérés par rapport à la même référence). A l'instant initial, les deux disques sont immobiles, le premier disque dans le position $\theta_{1,0}$ et le second $\theta_{2,0}$.



1. Trouver le système d'équations différentielles couplées caractérisant l'évolution du système.

2. Résoudre explicitement leur évolution au cours du temps. Quelle est la pulsation naturelle d'oscillations libres du système, appelée *pulsation propre* ?