CHAP 18 Thermodynamique 1 : Statique des fluides

Forces surfaciques, forces volumiques. Champ de pression.	Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme. relation $dP/dz = -\rho g$.	Établir la relation entre la dérivée de la pression par rapport à une coordonnée verticale, la masse volumique et le champ de pesanteur. Établir l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait.
Résultante de forces de pression. Équivalent volumique des forces de pression	Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Évaluer une résultante de forces de pression.. Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.
Équation locale de la statique des fluides.	Établir l'équation locale de la statique des fluides.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme : relation $dP/dz = -\rho g$.	Citer des ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
Poussée d'Archimède.	Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède. Exploiter la loi d'Archimède.
Facteur de Boltzmann.	S'appuyer sur la loi d'évolution de la densité moléculaire de l'air dans le cas de l'atmosphère isotherme pour illustrer la signification du facteur de Boltzmann. Utiliser kT comme référence des énergies mises en jeu à l'échelle microscopique.

Rapport de Jury :
Centrale 2019 : L'expression de la poussée d'Archimède n'est pas toujours connue et, souvent, les candidats n'ont pas conscience qu'elle constitue la résultante des forces de pression.
CCPINP 2021 : En statique des fluides, un axe vertical orienté est nécessaire si on veut utiliser correctement les relations.

I. Description d'un fluide

1. Définition

Un fluide est un milieu matériel qui a la propriété de pouvoir s'écouler. Cela correspond aux liquides et aux gaz.

2. Particule de fluide mésoscopique

Def :

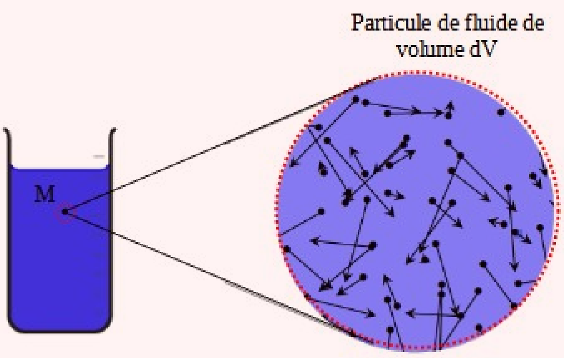
On appelle particule fluide (abrégée en PF dans ce cours) une portion

de fluide **mésoscopique** de masse constante mais de volume variable dV.

un volume dV est mésoscopique si il est compris entre

1 mm^3 et 1 μm^3

(pour un objet macroscopique de taille caractéristique 1 m)



Remarques :

1) En statique des fluides, **il n'y a pas d'écoulement, donc les particules de fluides sont immobiles. Ce n'est pas le cas pour un fluide en mouvement.**

2) Une particule de fluide contient un grand nombre de particules. On peut donc définir sa pression $P(M)$ et sa température $T(M)$. Pour le fluide macroscopique ce sont les valeurs locales (en M) des champs de P et T

3. Masse volumique

Soit une particule de fluide de masse dm et de volume dV, de centre M.

La masse volumique de cette particule de fluide s'écrit : $\rho(M)=\frac{dm}{dV}$ ou $\mu(M)=\frac{dm}{dV}$

Ordres de grandeur de ρ_{eau} et ρ_{air} (à connaître) :

$$\rho_{eau}=1000\,kg.m^{-3}$$

$\rho_{air}=\frac{P\,M_{air}}{RT}\approx 1{,}2\,kg.m^{-3}$ au niveau du sol (donc à P_{atm} = 1,013 bar) et à T ambiante !

Fluide compressible : **Un fluide est dit compressible si sa masse volumique peut varier au cours du temps et selon le point de l'espace qu'on considère.**

Exemple : **gaz parfait**

$PV=nRT \Rightarrow n=\frac{PV}{RT}$ et $\rho=\frac{m}{V} \overset{n=\frac{m}{M}}{=} \frac{nM}{V}$ donc en combinant les deux $\boxed{\rho=\frac{PM}{RT}}$ (Dépend de P et T)

Attention !!! il faut mettre M en **kg**.mol^{-1} pour les calculs

Fluide incompressible : **Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est constante. C'est à dire qu'elle ne varie ni au cours du temps ni selon le point M (ou volume mésoscopique) du fluide qu'on considère**

Exemple : les liquides, qui sont peu compressibles, seront considérés comme incompressibles.

Digression : le caractère incompressible de l'eau permet de découper du métal avec un jet d'eau sous pression

II Actions mécaniques dans un fluide

1. Classification des forces modélisant des actions mécaniques

Les forces subies par un solide peuvent être classées en deux grandes catégories :

▷ **les forces à distance,** exercées par l'intermédiaire d'un champ :

poids, force de Lorentz ;

▷ **les forces de contact,** qui nécessitent que l'opérateur touche le système :

forces de frottement, réaction du support, ressort

En mécanique des fluides, cette classification prend une forme un peu différente, et on distingue plutôt :

▷ **les forces volumiques,** qui sont la résultante des forces à distance subies par chacune des molécules de la particule fluide ;

▷ **les forces surfaciques,** qui sont l'équivalent des forces de contact avec les particules fluides voisines ou avec les parois du récipient contenant le fluide.

2. Forces volumiques

Si une particule de fluide de volume dV subit une force $d\vec{F}$

alors on peut définir la force volumique (ou densité de force volumique) :

$$\boxed{\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}}$$

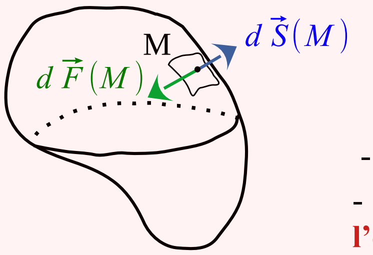
Rmq : de pas confondre une force élémentaire (en N) notée $d\vec{F}$ qui s'exerce sur un volume élémentaire (c-a-d infiniment petit) et une force volumique **(en N.m^{-3})** notée $\vec{f}$ dans ce chapitre

<u>Exemple</u> : force volumique de pesanteur (notée $\vec{f}_g$) s'exerçant sur un objet de volume dV :

Force de pesanteur= Poids de l'objet $\vec{P} = m\vec{g} = \rho\, dV\, \vec{g} \rightarrow \vec{f}_g = \frac{\vec{P}}{dV} \Rightarrow \vec{f}_g = \rho \vec{g}$

3. Exemple de force surfacique : la force de pression

Soit S une surface fermée orientée délimitant une fluide intérieur (système Σ) et un fluide extérieur.



La force de pression élémentaire $d\vec{F}(M)$ qu'exerce le fluide extérieur sur un élément de surface $d\vec{S}$ de centre M s'écrit :

$$\boxed{d\vec{F}(M) = -P(M)\, d\vec{S}(M)}$$

- P(M) est la pression au point M, en Pa
- $d\vec{S}(M)$ est un vecteur surface élémentaire, orienté de l'intérieur **vers l'extérieur** par convention **et normal à la surface en M par définition**

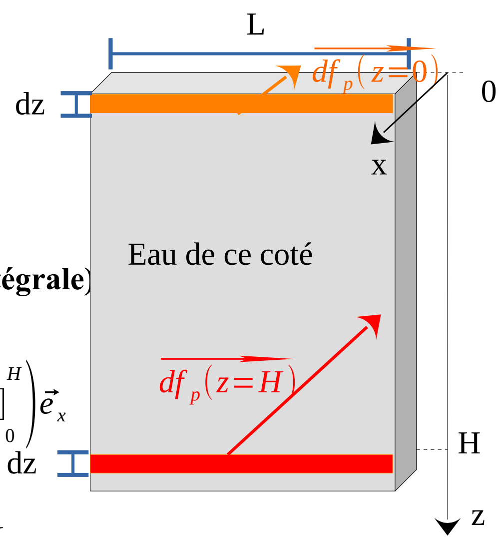
La résultante des forces pressantes sur Σ (de surface S)a pour expression : $\boxed{\vec{F}_p = -\iint_{M \in S} P(M)\, d\vec{S}(M)}$

Si de plus la pression est <u>uniforme</u> sur Σ surface <u>plane</u> d'aire S et dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\vec{F}_p = -PS\vec{u}$$

Exemple barrage

Exprimer la résultante des forces de pression exercée par l'eau sur un barrage de H= 50 m de haut et L=100 m de long sachant que la pression dans l'eau est de la forme P(z) = P_0+ ρ g z avec un axe (Oz) descendant



La force de pression élémentaire $d\vec{F}_p(z)$ **sur une surface élémentaire** $d\vec{S} = L\, dz\, \vec{e}_x$ **d'épaisseur dz à une profondeur z a pour expression :** $d\vec{F}_p(z) = -P(z) L\, dz\, \vec{e}_x$

La résultante des forces de pression (sur un côté) est la somme (intégrale) ces forces élémentaires sur toute la hauteur du barrage

$$\vec{F}_{ptot} = \int_{z=0}^{H} -P(z) L\, dz\, \vec{e}_x = \int_{z=0}^{H} -(P_0 + \rho g z) L dz\, \vec{e}_x = -\left(P_0 L [z]_0^H + \rho g \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^H\right)\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_p = -\left(P_0 L H + \rho g \frac{H^2}{2} L\right)\vec{e}_x \qquad \|\vec{F}_p\| = P_0 L H + \rho g \frac{H^2}{2} L = 1{,}7\,10^9\, N$$

-Remarque 1 :

Comme P(M)>0 le vecteur force de pression est toujours dirigé vers l'intérieur du volume délimitée par S

- Remarque 2 : On constate que la force pressante est proportionnelle à la surface dS de l'interface considérée. Par analogie avec la définition d'une force volumique, on constate ainsi que :

la pression peut s'interpréter comme la densité <u>surfacique</u> de force pressante

$$\boxed{P(M)=\frac{\|\vec{dF}(M)\|}{\|\vec{dS}(M)\|}}$$

Attention ! : ***Poids ≠ force pressante***

Force volumique — Force surfacique

-Remarque 3 : La pression est continue à la traversée d'une interface entre deux fluides :

P(z+ε) = P(z-ε)
Avec ε<<taille du sytème

z	P(z+ε)	air
	P(z-ε)	eau

À la surface de l'eau :
$P=P_{atm} \sim 1$ bar = 10^5 Pa

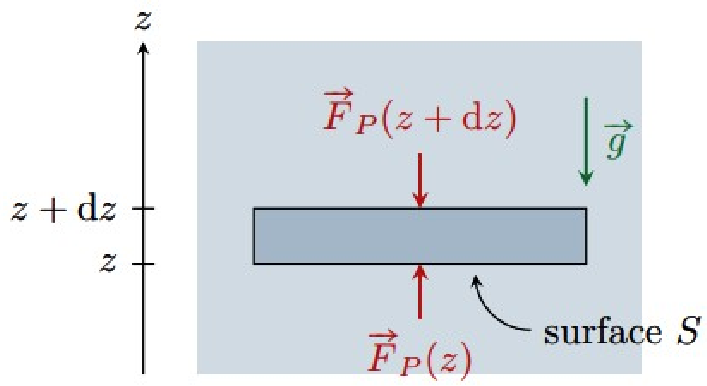
Par contre P n'est pas forcement continue entre deux fluides **séparés par un solide** !

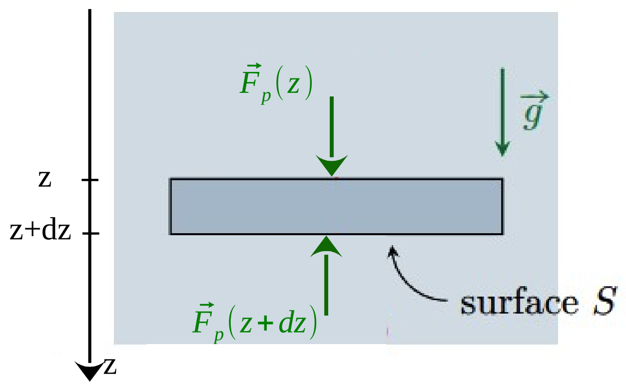
5. Relation fondamentale (ou équation locale) de la statique des fluides

Objectif : On cherche le champ de pression P(M)(la donnée de la pression en fonction du point M).

Comme la pression est une force, on utilise une approche mécanique pour trouver ce champ

<u>Système étudié</u> : On considère une particule de fluide de volume dV **immobile**, **car le fluide est au repos**.





La particule de fluide est méso dans le direction z mais macro dans les directions x et y. On raisonne donc sur une tranche mésoscopique de fluide à l'équilibre, de surface S et hauteur infinitésimale dz

En toute rigueur les forces sont mal représentées (le point d'application n'est pas au bon endroit)

Volume de la PF : **dV = S dz**

Attention !! : La résolution du problème dépend du choix du sens de l'axe z

<u>Bilan des forces :</u> Poids (noté $d\vec{P}$) et résultante des forces de pression (notée $\vec{F_{ptot}}$)

<u>Expressions si l'axe vertical est dirigé vers le haut :</u>

Force pressante exercée par la tranche en dessous :

$$\vec{F}_p(z) = -P(z)(-S\vec{e}_z) = P(z)S\vec{e}_z$$

Force pressante exercée par la tranche au dessus :

$$\vec{F}_p(z+dz) = -P(z+dz)S\vec{e}_z$$

- Résultante des forces de pression

$$\vec{F_{ptot}} = \vec{F}_p(z+dz) + \vec{F}_p(z) = P(z)S\vec{e}_z - P(z+dz)S\vec{e}_z$$

$$\vec{F_{ptot}} = (P(z) - P(z+dz))S\vec{e}_z$$

dL₁ → $\frac{dP}{dz} \approx \frac{P(z+dz)-P(z)}{dz}$ ainsi

$$\boxed{\vec{F_{ptot}} = \frac{-dP}{dz} dz\, S\vec{e}_z = \frac{-dP}{dz} dV\, \vec{e}_z}$$

- le poids : $\vec{Poids} = m\vec{g} = \rho\, dV\, \vec{g}$

Si l'axe vertical est dirigé vers le haut $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$

$$\vec{Poids} = -\rho\, dV\, g\,\vec{e}_z$$

<u>Expressions si l'axe vertical est dirigé vers le bas</u>

Force pressante exercée par la tranche en dessous :

$$\vec{F}_p(z+dz) = -P(z+dz)(\,S\vec{e}_z) = -P(z+dz)S\vec{e}_z$$

Force pressante exercée par la tranche au dessus

$$\vec{F}_p(z) = P(z)(S\vec{e}_z)$$

→ Résultante des forces de pression

$$\vec{F_{ptot}} = \vec{F}_p(z+dz) + \vec{F}_p(z) = P(z)S\vec{e}_z - P(z+dz)S\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{F_{ptot}} = \frac{-dP}{dz} dz\, S\vec{e}_z = \frac{-dP}{dz} dV\, \vec{e}_z}$$

-Le poids $\vec{Poids} = m\vec{g} = \rho\, dV\, \vec{g}$

Si l'axe vertical est dirigé vers le bas $\vec{g} = +g\,\vec{e}_z$

$$\vec{Poids} = +\rho\, dV\, g\,\vec{e}_z$$

On a alors d'après **le principe fondamental de la statique (car immobile)** appliqué à la particule de fluide dans le réf terrestre supposé galiléen :

$$\Sigma d\vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Poids} + \vec{F_{ptot}} = \vec{0}$$

$$\vec{Poids} + \vec{F_{ptot}} = \vec{0} \Leftrightarrow -\rho\, dV\, g\,\vec{e}_z - \frac{dP}{dz} dV\,\vec{e}_z = \vec{0}$$

projection sur (Oz) :

$$-\rho \cancel{dV}\, g - \frac{dP}{dz}\cancel{dV} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho\, g$$

Quand z augmente, P diminue, logique !

$$\vec{Poids} + \vec{F_{ptot}} = \vec{0} \Leftrightarrow +\rho\, dV\, g\,\vec{e}_z - \frac{dP}{dz} dV\,\vec{e}_z = \vec{0}$$

projection sur (Oz) :

$$\rho\, dV\, g - \frac{dP}{dz} dV = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dz} = \rho\, g$$

Quand z augmente, P augmente aussi , logique !

À savoir retrouver
Selon le sens de l'axe vertical

$$\frac{dP}{dz} = \pm\rho\, g$$

c'est la relation fondamentale de l'hydrostatique. Sa résolution permet de trouver le champ de pression P(z)

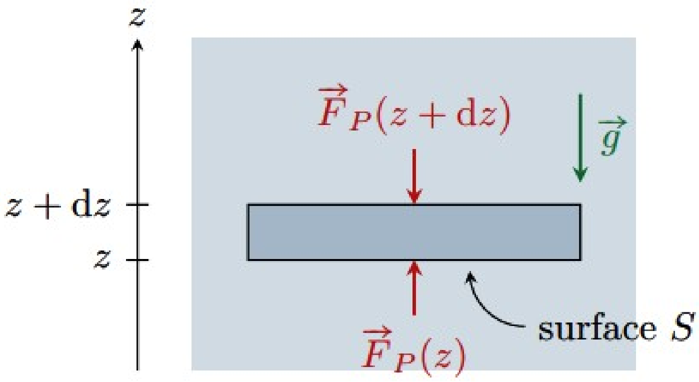
(aussi appelée équation locale de la statique des fluides)

Extension à plusieurs dimensions : La condition d'équilibre d'un fluide dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ s'écrit

$$\vec{grad}\, P = \rho\,\vec{g}$$

<u>Rappel en coordonnées cartésiennes</u> $\vec{\nabla} P = \vec{grad}(P) = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z$

6 Densité volumique de forces pressantes



a) Densité volumique de forces pressantes

On a montré que la résultante des forces de pression a pour expression :

$$\vec{F}_{ptot}=\vec{F}_p(z+dz)+\vec{F}_p(z)=P(z)S\vec{e}_z-P(z+dz)S\vec{e}_z$$

or $P(z+dz)-P(z)=\frac{dP}{dz}(z)\times dz$

donc $$\vec{F}_{p\,tot}=-\frac{dP}{dz}dz\,S\,\vec{e}_z=\frac{-dP}{dz}dV\,\vec{e}_z$$

Si le champ de pression varie dans plusieurs direction (par exemple si une pompe est présente) la résultante des forces de pression sur un volume mésoscopique dV :

$$\vec{F}_{p\,tot}=-\frac{dP}{dz}dz\,S\,\vec{e}_z=-\overrightarrow{grad}\,P\,dV$$

On peut définir une densité volumique de forces pressantes

$$\vec{f}_{p\,tot}=\frac{\vec{F}_{ptot}}{dV}=-\overrightarrow{grad}\,P\frac{dV}{dV}\Leftrightarrow\vec{f}_{ptot}=-\overrightarrow{grad}\,P$$

b) Lien avec l'équation locale de la statique des fluides

on a vu que l'autre force que subit la particule de fluide mésoscopique est le poids (force gravitationnelle de la terre sur la particule)

$$\overrightarrow{Poids}=m\vec{g}=\rho_f\,dV\,\vec{g}$$

Le principe de la statique appliqué à la particule de fluide s'écrit alors

$$\vec{P}_{oids}+\vec{F}_{p\,tot}=\vec{0}\Leftrightarrow\rho_f dV\,\vec{g}-\overrightarrow{grad}\,P\,dV=\vec{0}$$

en divisant par dV on arrive à une équation sur les densités volumiques de forces $\vec{f}_{poids}=\frac{\overrightarrow{Poids}}{dV}$ et $\vec{f}_{ptot}=\frac{\vec{F}_{ptot}}{dV}$

$$\boxed{\vec{f}_{poids}+\vec{f}_{p\,tot}=\vec{0}\Leftrightarrow\rho_f\vec{g}-\overrightarrow{grad}\,P=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{grad}\,P=\rho_f\vec{g}}$$

C'est l'équation volumique (ou locale) de la statique des fluides

III. Pression dans un fluide incompressible et homogène

1. Loi de l'hydrostatique

Soit un liquide au repos, de masse volumique *ρ = Cste (independante du point que l'on considère dans le fluide).*

On cherche l'expression de la pression $P(M)$ dans ce liquide.

La relation fondamentale de la statique des fluides donne :

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\pm\rho g \quad \text{(selon l'orientation de l'axe vertical)}$$

Si l'axe vertical est dirigé **vers le haut** $\frac{\partial P}{\partial z}=-\rho g$

Par primitivation $P(z)=-\rho g z+C_1$

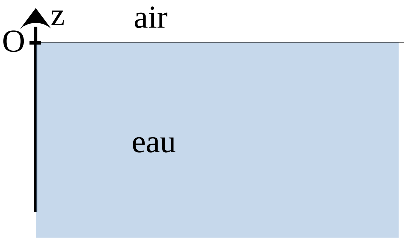
Si l'axe vertical est dirigé vers le bas $\frac{\partial P}{\partial z}=+\rho g$

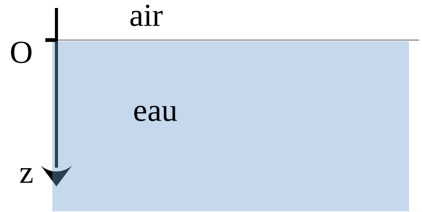
Par primitivation $P(z)=\rho g z+C_2$

la constante est déterminée en utilisant les conditions aux limites

On utilise souvent la pression à l'interface entre deux fluides (par exemple à l'interface entre le liquide et l'atmosphère)

En général cette interface est plane et on la place souvent dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz)en z=0





On note P_0 la pression en z=0 (donc $P(z=0) = P_0$)

$P(z=0)=-\rho g 0+C_1 \Rightarrow C_1=P_0$

finalement $\boxed{P(z)=-\rho g z+P_0}$

$P(z=0)=\rho g 0+C_2 \Rightarrow C_2=P_0$

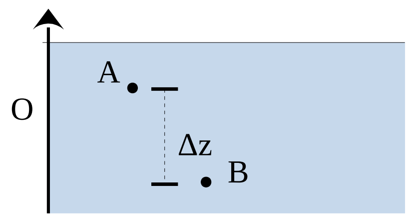
$\boxed{P(z)=+\rho g z+P_0}$

à savoir retrouver

Soit deux points au sein d'un fluide situé en A et en B

loi barométrique :
$P_{bas}=P_{haut}+\rho g \Delta z$

La différence de pression entre deux points est proportionnelle à l'écart de profondeur Δz >0 pour un fluide incompressible



Application : siphon

Ordre de grandeur :

- Pression quand on plonge à 10 m de profondeur ?

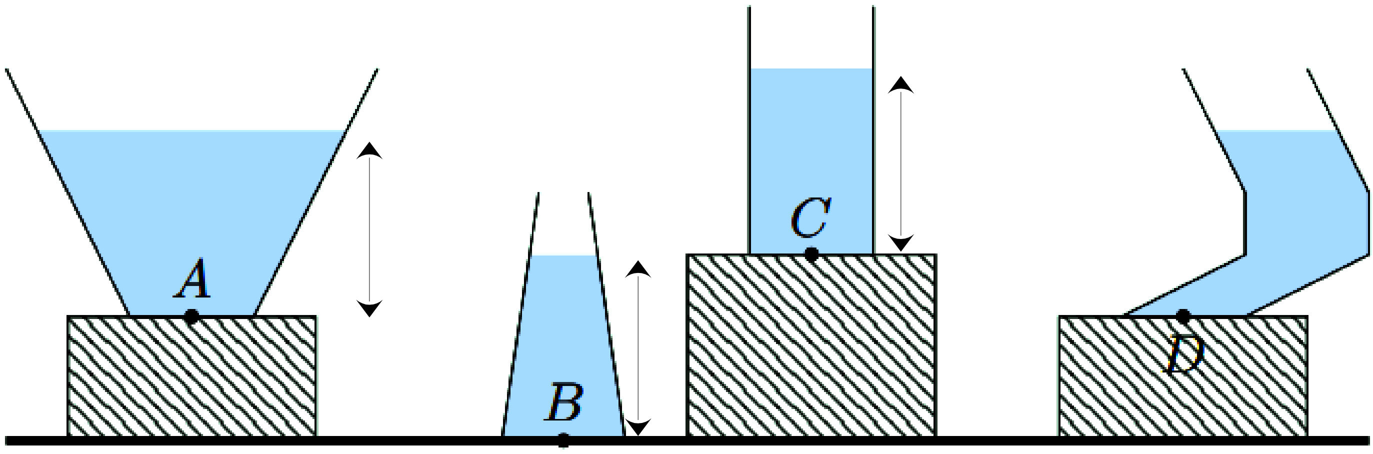
$P_{haut}=P_{atm}$ = 1 bar $P_{bas}=P_{haut}+\rho g h=10^5+1000\times 9,81\times 10\approx 2\times 10^5\,Pa=2\,\text{bar}$

La pression augmente de 1 bar tout les 10 m dans l'eau

-Pression au fond de la fosse des Mariannes (lieu le plus profond de l'océan, environ 10 km **de profondeur** , au large des Philippines) : **P = 1 · 10⁸ Pa = 1000 atm**

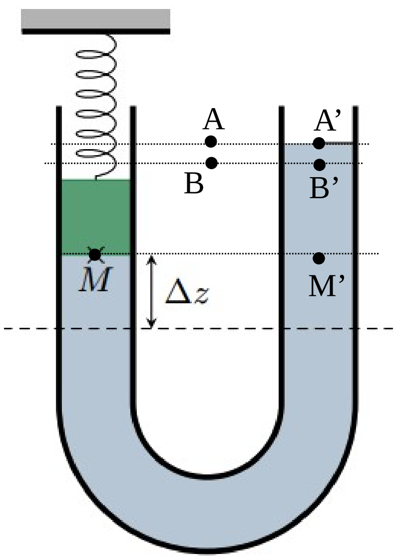
Exercice 1 : On suppose que le champ de **pression est homogène dans l'air** et que la pression y vaut P_{atm}=1,013 bar

Q1 Comparer les pressions aux points A,B,C et D. Les récipients sont posés sur des supports de différentes hauteurs.



Réponse : Même hauteur d'eau dans tous les récipients, donc même pression en chacun des points, la hauteur du support ne joue aucun rôle

Exercice 2 :



On dispose dans un tube en U un bouchon accroché à un ressort qui exerce une force répulsive sur le bouchon , ce qui impose une pression P en M

Q1 a t-o n P(M) = P(M')?

Oui car les 2 points ont la même altitude et sont dans le même système fluide

Q2 à t-on P(A) = P(A') ? oui

Q3 a-t-on P (B') = P(B) ? Non car pas dans le même fluide (même si l'altitude est identique

Principe de Pascal : une variation de pression en un point d'un liquide s'accompagne d'une égale variation de pression en tout point du liquide

IV. Pression dans un fluide compressible : modèle de l'atmosphère isotherme (souvent aux concours)

1. Hypothèses du modèle

– On étudie l'atmosphère terrestre sur quelques kilomètres d'altitude, donc sur une hauteur très petite devant le rayon R_T de la Terre. Le champ de pesanteur peut alors être considéré comme constant : g = 9,8 m.s^{-2}.

– On suppose qu'il n'y a pas de mouvements atmosphériques : l'atmosphère est au repos.On peut alors appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides.

– On suppose que sur les kilomètres étudiés, la température T est constante : c'est le modèle de l'atmosphère isotherme. (En fait, jusqu'à 10 km d'altitude, T décroît avec l'altitude de 2% par kilomètre ; ce phénomène est négligé pour simplifier le modèle). $M=\frac{20}{100}M_{O2}+\frac{80}{100}M_{N_2}$ Air = 20 % O_2 + 80 % N_2

– On assimile l'air à un gaz parfait, de masse molaire M = 29 g.mol^{-1}. On a $PV = nRT$, d'où $\rho=\frac{nM}{V}=\frac{PM}{RT}$.

R = N_A k_B ou N_A est le nombre d'Avogadro (6,03 10^{23}mol^{-1}) et k_B la constante de Boltzmann (1,38.10^{-23} J·K^{-1})
R est la constantedes gaz parfaits

2. Expression de la pression $P(z)$

- On oriente z vers le haut, on choisit une origine au niveau du sol.

- Condition au limites : **Au sol P(z=0) = P_{atm} = 1,013 bar = 1013 hPa ~ 1 bar**

Rmq : par abus de langage on appelle cette pression « pression atmosphérique » mais il faudrait préciser « pression atmosphérique **au niveau du sol** »

La loi de l'hydrostatique pour l'atmosphère :

comme l'axe (Oz) est vertical dirigé vers le haut : $\frac{dP}{dz}=-\rho g$

Attention !! Dans ce modèle la masse volumique ρ n'est pas la même partout car l'air est compressible!

ρ est une fonction de l'altitude z → $\frac{dP}{dz}=-\rho(z)g$

Conséquence : On ne peut pas primitiver directement -ρg en - ρgz + cste (comme pour un fluide incompressible)

→ la pression n'augmente pas linéairement avec l'altitude dans l'air

a) Équation différentielle issue de la loi de l'hydrostatique (À savoir retrouver)

On sait d'après la loi des gaz parfaits que $\rho(z)=\frac{P(z)M}{RT}$

On a donc $\frac{dP}{dz}=-P(z)\frac{M}{RT}g$

on encore $\frac{dP}{dz}+P(z)\frac{Mg}{RT}=0$

c'est une équation différentielle sur P(z)

b) Expression du champ de pression

Les solutions de l'équation sont de la forme : $P(z)=Ae^{-\frac{Mg}{RT}z}$

on détermine A à l'aide de la pression au niveau du sol : $P(z=0)=P_{atm}\Rightarrow Ae^{0}=P_{atm}$

finalement $\boxed{P(z)=P_{atm}e^{-\frac{Mg}{RT}z}}$

c) hauteur caractéristique de variation

On pose souvent $H=\frac{RT}{Mg}$ la hauteur caractéristique de variation de P

on a alors $\boxed{P(z)=P_0e^{-\frac{z}{H}}}$

Odg : Pour T = 293 K (20°C) on trouve $H=8,6\,km$

Remarque (Pour l'application numérique, penser à mettre la masse molaire en **kg**.mol^{-1}) $M_{air}=29\ 10^{-3}$ kg.mol^{-1}

3. Ordre de grandeur

si z = 4810 m (Sommet du Mont -Blanc) $P(z=4180m)=1\ \text{bar}\times e^{-\frac{4{,}810}{8{,}6}}=0{,}57\ \text{bar}$

La pression de l'air passe de 1,01 bar en z=0 m à 0,5 bar en z= 6000 m environ.
sur 10 mètres elle ne varie quasiment pas

V Facteur de Boltzmann

1. Nombre de particule à l'altitude z

Soit un volume d'air dV à l'altitude z . Ce volume contient un nombre N(z) de « molécules d'air »

L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $P(z)dV=n(z)RT$ or n(z) = N(z) /N_A donc $P(z)dV=N(z)\frac{R}{N_A}T$

or $P(z)=P_{atm}e^{-\frac{Mg}{RT}z}$ et **R = N_A k_B** donc $P_{atm}dV\,e^{-\frac{Mgz}{N_Ak_BT}}=N(z)\frac{N_Ak_B}{N_A}T$

et comme M = m^* N_A ou m^* est la **masse caractéristique** des molécules constituant l'air :

$P_{atm}dV\,e^{-\frac{m^*N_Agz}{N_Ak_BT}}=N(z)k_BT$ soit $N(z)=\frac{P_{atm}}{k_BT}dV\,e^{-\frac{m^*gz}{k_BT}}$ et comme $N(z=0)=dV\frac{P_{atm}}{k_BT}e^0$ on a

$$\boxed{N(z)=N(0)\,e^{-\frac{m^*gz}{k_BT}}}$$

2. Interprétation physique

On voit apparaître mgz qui est l'énergie potentielle de pesanteur d'une « molécule d'air équivalente »

Pour assurer l'homogénéité il faut forcement que k_B T possède la dimension d'une énergie ,

E_{carac} = k_B T donne l'ordre de grandeur des énergies mises en jeu à l'échelle microscopique. (pour une« molécule »)

À θ=27°C soit T = 300 K A.N : E_{carac} = 4 10^{-21} J

3. Facteur de Boltzmann

Le nombre moyen N_i de particules se trouvant dans l'état d'énergie E_i (ici E_i =mgz) est proportionnel au facteur de BOLTZMANN $\exp(-\frac{E_i}{k_BT})$

Il intervient dans d'autres domaines de la physique avec des énergies E_I différentes de E_{Pp}

VI. Théorème d'Archimède

1.) Énoncé : Tout corps immergé dans un fluide au repos subit une force, appelée poussée d'Archimède, qui est opposée au poids du fluide déplacé. Cette force est appliquée au centre de masse du fluide déplacé.

La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ vaut :

$$\vec{\Pi}=-m_f\vec{g}=-\rho_f V\vec{g}$$

m_f est la masse de fluide déplacé

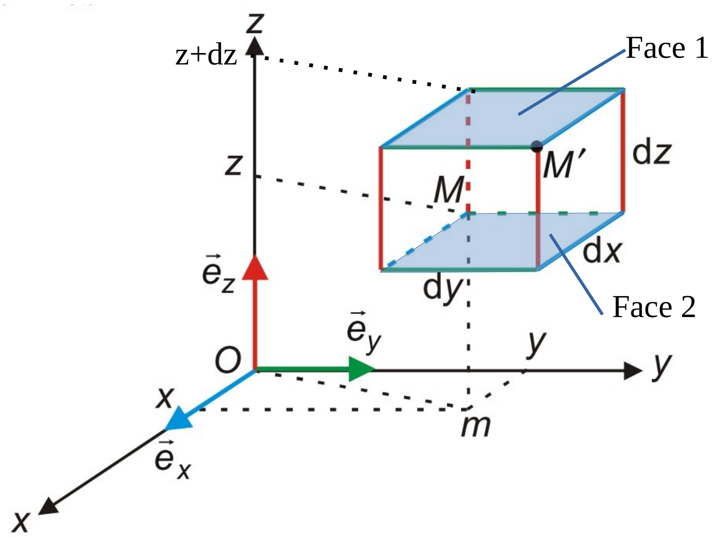
m_f = ρ_f V avec ρ_f la masse volumique du fluide déplacé et V le volume du corps **immergé**

Lien avec les forces pressantes :

La poussée d'Archimède <u>est</u> la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur l'objet.

Conséquence importante : quand on fait un bilan des forces s'exerçant sur un système, on considère <u>soit</u> la poussée d'Archimède <u>soit</u> la résultante des forces de pression mais pas les deux !

<u>Exemple</u> : calcul de la résultante des forces de pression sur un solide parallélépipédique dans fluide incompressible



ici axe vertical ascendant donc $\mathbf{P(z)= -\rho_f\, g\, z + P_0}$

Les forces pressants se compensent deux à deux sur les faces perpendiculaires au plan (OXY)

Par contre les forces ne se compensent pas entre la face 1 et la face 2 car la pression est différente sur ces faces

$$\vec{F}_{p1}=P(z+dz)\,dy\,dx(-\vec{e}_z)=(-\rho_f g(z+dz)+P_0)\,dy\,dx(-\vec{e}_z)$$

$$\vec{F}_{p1}=(\rho_f g(z+dz)-P_0)\,dy\,dx\,\vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{p2}=P(z)\,dy\,dx(+\vec{e}_z)=(-\rho_f g z+P_0)\,dy\,dx(\vec{e}_z)$$

$$\vec{F}_{p2}=-(\rho_f g z-P_0)\,dy\,dx\,\vec{e}_z$$

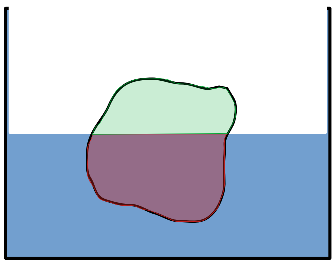
La résultante totale des forces est donc $\vec{F}=\vec{F}_{p1}+\vec{F}_{p2}=(\rho_f g(\cancel{z}+dz)-\cancel{P_0})\,dy\,dx\,\vec{e}_z-(\rho_f g\cancel{z}-\cancel{P_0})\,dy\,dx\,\vec{e}_z$

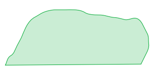
$$\vec{F}=\rho_f\, g\, dz\, dy\, dx\, \vec{e}_z$$

Comme dV = dz dy dx et comme $\vec{g}=-g\vec{e}_z$ on bien $\vec{F}=\vec{\Pi}=-\rho_f dV\vec{g}$

2. Remarques

1) Si le solide de masse volumique ρ est partiellement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f :



 Volume émergé V_e

 Volume immergé V_i

Poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}=-\rho_f\, V_i\, \vec{g}$$

Poids

$$\overrightarrow{Poids}=\rho(V_i+V_e)\vec{g}$$

Ne pas confondre ρ et ρ_f !

2) Si le solide de volume V et de masse volumique ρ est totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f on peut définir un poids apparent $\vec{P}_{app}$:

$$\vec{P}_{app}=\vec{\Pi}+\vec{P}=-\rho_f V\vec{g}+\rho V\vec{g}=(\rho-\rho_f)V\vec{g}$$

si on pose m* = $(\rho-\rho_f)V$ la masse apparente

- Si le solide est « plus lourd que le fluide », c'est-à-dire si $\rho > \rho_f$, alors $\vec{P}_{app}$ est dans le sens de $\vec{g}$, donc vers le bas. Alors, l'objet coule. Exemple : bloc de métal dans l'eau.

- Si le solide est « plus léger que le fluide », c'est-à-dire si $\rho < \rho_f$, alors $\vec{P}_{app}$ est dans le sens opposé à $\vec{g}$, donc vers le haut. Alors, l'objet remonte. Exemple : montgolfière gonflée à l'hélium, dans l'air.

d'où viennent les nuages https://www.youtube.com/watch?v=lqg-4TpReo4

Principe des ballastes https://www.edumedia-sciences.com/fr/media/630-sous-marin