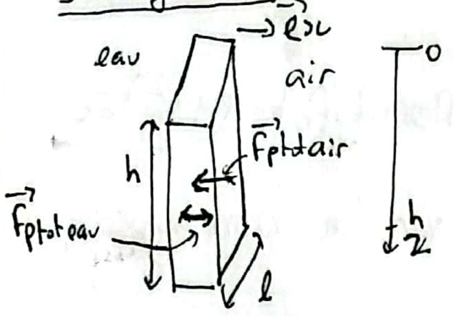
Correction TD18

Exercice 2

barrage droit



• Pour la résultante des forces de pression de l'eau sur le barrage

$$\vec F_{ptot\,eau} = +\int_{z=0}^{h} P(z)\, L\, dz\, \vec e_x = +\int_{z=0}^{h} (P_0+\rho g z)\, L\, dz\, \vec e_x$$

$$\vec F_{ptot\,eau} = \left(L P_0 h + \rho g \frac{h^2}{2} L\right)\vec e_x$$

• Pour " de l'air sur le barrage

$$\vec F_{ptot\,air} = -\int_0^h \underbrace{P(z)}_{P_0\ \forall z \text{ ds l'air}} L\, dz\, \vec e_x = -P_0 L \int_0^h dz\, \vec e_x = -P_0 L h$$

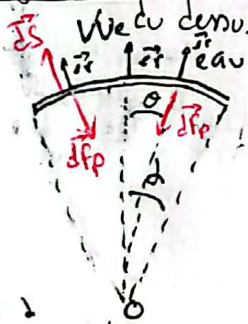
Résultante de toutes les forces pressantes

$$\vec F_{ptot} = \vec F_{ptot\,eau} + \vec F_{ptot\,air} = \cancel{L P_0 h \vec e_x} + \rho g L \frac{h^2}{2}\vec e_x - \cancel{P_0 L h \vec e_x}$$

$$\boxed{\vec F_{ptot} = \rho g L \frac{h^2}{2}\vec e_x} \Rightarrow \boxed{\|\vec F_{ptot}\| = \rho g L \frac{h^2}{2}}$$

barrage voûté

Vue du dessus



$\uparrow \vec e_x$

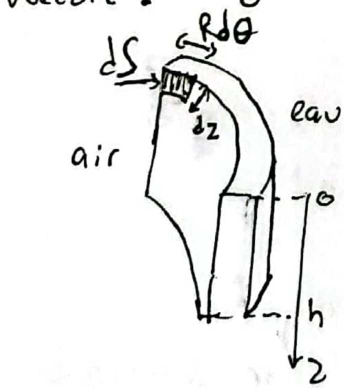
• Pour $\vec F_{ptot\,eau}$:

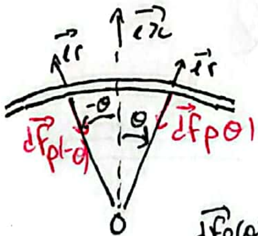
ici $\boxed{\vec{dS} = R\, d\theta\, dz\, \vec e_r}$ et $\vec{dF_p}(\theta) = -P(z)\,\vec{dS}(\theta)$ — force de pression sur dS

alors $$\vec F_{ptot\,eau} = -\int_{\theta=-\alpha}^{\theta=\alpha}\int_{z=0}^{h}(P_0+\rho g z)\, R\, d\theta\, dz\, \vec e_r$$ équation (1)

$\vec e_r$: direction variable ! (dépend de θ)

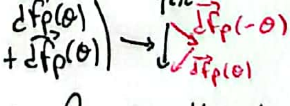
vue côté :





Par symétrie :

$\vec{dF_p}(-\theta)+\vec{dF_p}(\theta)$ est dirigé selon $-\vec e_x$



Ainsi la résultante est dirigée selon $-\vec e_x$

$$\boxed{\vec F_{ptot\,eau} = -F_{ptot\,eau}\,\vec e_x}$$ ♡

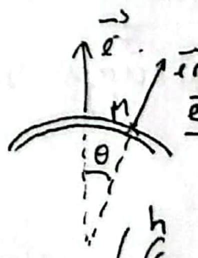
donc $\|\vec F_{ptot\,eau}\| = -\vec F_{ptot\,eau}\cdot\vec e_x$

$\|\vec F_{ptot\,eau}\| = -\vec F_{ptot\,eau}\cdot\vec e_x$

on utilise (1):

↳ $$\|\vec F_{ptot\,eau}\| = \underbrace{+}_{-1\times -1}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{z=0}^{h}(P_0+\rho g z)\, R\, d\theta\, dz\, \vec e_r\cdot\vec e_x$$

Or



$\vec e_r\cdot\vec e_x = \cos\theta$

$$\|\vec F_{ptot\,eau}\| = \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{z=0}^{h}(P_0+\rho g z)\, R\, d\theta\, dz\cos\theta = \int_{\theta=-\alpha}^{\theta=\alpha} R\cos\theta\, d\theta \times \left(\int_{z=0}^{h}(P_0+\rho g z)\, dz\right)$$

$$\|\vec{F}_{plot\,eau}\| = R\,[\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha}\left(P_0[z]_0^h + \rho g\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h\right)$$

$$\|\vec{F}_{plot\,eau}\| = R\left(\sin\alpha - \sin(-\alpha)\right)\left(P_0 h + \rho g \frac{h^2}{2}\right)$$

$$\underline{\|\vec{F}_{plot\,eau}\| = 2R\sin\alpha\left(P_0 h + \rho g\frac{h^2}{2}\right)} \Rightarrow \vec{F}_{plot\,eau} = -2R\sin\alpha\left(P_0 h + \rho g\frac{h^2}{2}\right)\vec{e_x}$$

Pour la résultante des forces pressantes de l'air sur le barrage

Par analogie $\vec{F}_{plot\,air} = (+)\, 2R\sin\alpha\,(P_0 h)\,\vec{e_x}$

(et comme partout $P = P_0$)

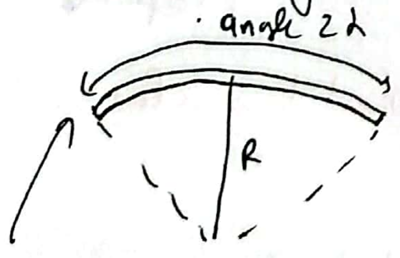
sens opposé à $\vec{F}_{plot\,eau}$

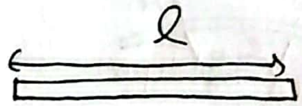
finalement : $\vec{F}_{plot} = \vec{F}_{plot\,eau} + \vec{F}_{plot\,air} = \underline{-2R\sin\alpha\,\rho g\frac{h^2}{2}\vec{e_x}}$

<u>Bilan</u> $\|\vec{F}_{plot}\| = 2R\sin\alpha\,\rho g\frac{h^2}{2}$ pour barrage voûté

$\|\vec{F}_{plot}\| = \rho g\frac{h^2}{2}\,l$ pour barrage droit

$2R\sin\alpha$ joue le role de l





la longueur du barrage est $l = 2\alpha R$

On retrouve la m chose si $\alpha \ll 1\,rad$ car $\alpha \simeq \sin\alpha$

sinon $\sin\alpha < \alpha$ donc l'effort est plus faible pour le barrage voûté !

EXERCICE 3

Le nombre de molécules dans un volume $d\tau$ à l'altitude z est
$$N = n^*(z)\,d\tau$$

Donc la quantité de matière dans ce volume est $n = \frac{n^*(z)d\tau}{Na}$

or GP $\Rightarrow$ $P(z)d\tau = nRT$ donc

$$P(z)d\tau = \frac{n^*(z)d\tau}{Na}RT$$

soit $n^*(z) = \frac{Na}{RT}P(z)$ or $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ avec

$H = \frac{RT}{Mg}$ donc
$$n^*(z) = \frac{Na}{k_B Na T} P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

soit $\boxed{n^*(z) = n_0^* \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \text{ avec } n_0^* = \frac{P_0}{k_B T} \text{ et } H = \frac{RT}{Mg}}$

EXERCICE 4

1. $T(z) = -az + b$ $\quad \underline{[b] = \theta}$ et $\underline{[a] = \theta L^{-1}}$

$T(0) = b = T_0$ donc $\boxed{b = T_0}$

De plus $T(8848) = -a \times 8848 + b = -40 + 273{,}15$

$$\Rightarrow a = -\left(\frac{273{,}15 - 40 - (273{,}15 + 20)}{8848}\right) \Rightarrow \underline{a = 6{,}78.10^{-3}\ K.m^{-1}}$$

2. LFH $\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g$ avec $P(z)d\tau = \frac{dm}{M}RT$

$$\Rightarrow P(z)d\tau = \frac{\rho(z)d\tau}{M}RT$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT}P$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R(-az+b)}dz$$

$$\Rightarrow \int_{P=P_0}^{P=P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\int_{z=0}^{z=z} \frac{dz}{-az+b}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{R(-a)}\int_0^z \frac{-a}{-az+b}dz = +\frac{Mg}{Ra}\left[\ln(-az+b)\right]_0^z$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{Mg}{Ra} \ln\left(\frac{-az+b}{b}\right) = \ln\left(\left(\frac{-az+b}{b}\right)^{\frac{Mg}{Ra}}\right)$$

soit $$\boxed{P(z) = P_0\left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^{Mg/Ra}}$$

3. Au sommet de l'everest, $z = 8848$ m.

A.N. $$P(8848) = 1\left(1 - \frac{6{,}78.10^{-3}}{293{,}15} \times 8848\right)^{\frac{29.10^{-3} \times 10}{8{,}31 \times 6{,}78.10^{-3}}}$$

$\Rightarrow$ $\underline{P_{everest} = 0{,}31 \text{ bar}}$

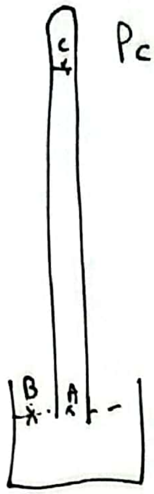
4. Avec le modèle isotherme $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT} z\right)$

A.N. $$P_{ev} = 1 \exp\left(-\frac{29.10^{-3} \times 10}{8{,}31 \times 293{,}15} \times 8848\right)$$

$\rightarrow$ $\underline{P_{ev} = 0{,}35}$

On a $\frac{P_{ev\ iso}}{P_{everest}} = \frac{0{,}35}{0{,}31} = 1{,}12$. (marge raisonnable).

Exercice 5



1) $P_B = P_A = P_{atm}$ (A et B ds le m̂ fluide à la m̂ altitude) et la pression est continue à l'interface mercure/air

Loi Barométrique : $P_{A} = \cancel{P_C}^{\,0} + \rho_{Hg}\, g h$ (avec $P_A = P_{atm}$)

$\boxed{P_{Atm} = \rho_{Hg}\, g h}$ A.N $\boxed{P_{atm} = 1{,}014 \; 10^5 \text{ Pa}}$

2) on prend $h' = 1\text{ mm}$ $\Rightarrow$ $P' = \rho_{Hg}\, g h' = \underline{133 \text{ Pa}}$

P' : 1 torr

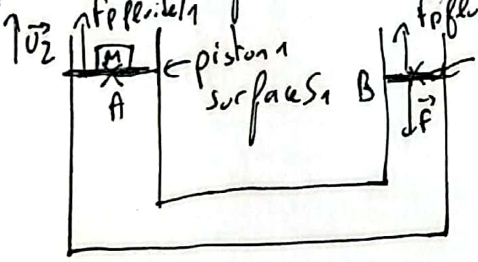
3) $P_{Atm} = \rho_{eau}\, g h_{eau} \Rightarrow h_{eau} = \dfrac{P_{Atm}}{\rho_{eau}\, g}$ A.N : $\underline{h_{eau} = 10{,}3\text{ m}}$

Il faut un long tube de verre !

Exercice 6)

Bilan des forces sur {piston 1 + masse} : • $\vec{P}_{masse} = M\vec{g} = -Mg\vec{u}_z$ • force pressante du fluide sur piston 1 :

$\underline{\vec{f}_{p\,fluide/1} = P(A)\, S_1\, \vec{u}_z}$



Équilibre du piston 1 : $\vec{P}_{masse} + \vec{f}_{p\,fluide/1} = \vec{0}$

project° sur O_z $\Leftrightarrow$ $\boxed{Mg = P(A)\, S_1}$ (1)

Bilan des forces sur {piston 2} : • $\vec{F} = -F\vec{u}_z$

• force pressante du fluide sur piston 2 : $\underline{\vec{f}_{p\,fluide/2} = +P(B)\, S_2\, \vec{u}_z}$

Équilibre du piston 2 : $\vec{F} + \vec{f}_{p\,fluide/2} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ (Project° sur O_z) $\boxed{F = P(B)\, S_2}$ (2)

Si les surfaces sont au même niveau : A et B sont à la m̂ altitude et dans le même fluide :

on en déduit

$\underline{P(A) = P(B)}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{Mg}{S_1} \overset{(1)}{=} P(B)$

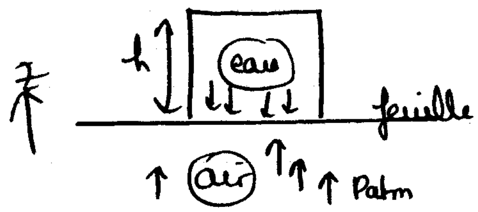
$\Leftrightarrow \dfrac{Mg}{S_1} \overset{(2)}{=} \dfrac{F}{S_2}$

finalement

$\boxed{F = Mg\, \dfrac{S_2}{S_1}}$

Si $S_2 \ll S_1$
$F \ll Mg$
On peut maintenir le système lourd avec une force F faible !

EXERCICE 7



Système {feuille} Ref : TSG

BDF : $\vec{P} = m_{feuille}\,\vec{g}$

et $\vec{F}_{Peau} = -P_{eau} \times S\,\vec{e_z}$

avec $P_{eau} = \rho_{eau}\, g\, h = \rho_{eau}\, g\, \frac{V}{S}$

$\rightarrow \quad \vec{F}_{Peau} = -\rho_{eau}\, g\, V\,\vec{e_z}$

A.N. $\quad F_{Peau} = 10^3 . 10 . 0{,}25 . 10^{-3} = 2{,}5\,N.$

enfin, $\quad \vec{F}_{Pair} = P_{air}\,S\,\vec{e_z}$

A.N. $\quad F_{Pair} = 10^5 . \pi (5.10^{-2})^2 \simeq 790\,N.$

$F_{Pair} \gg F_{Peau} \longrightarrow$ la feuille reste collée au verre !

N.B. Pour que la feuille tombe il faudrait $F_{Peau} = F_{Pair}$

c-a-d $\quad \rho_{eau}\, g\, V = P_{air}\, S$

$$\Rightarrow \quad \frac{V}{S} = \frac{P_{air}}{\rho_{eau}\, g} = h$$

il faudrait $h = \frac{P_{air}}{\rho_{eau}\, g} = \frac{10^5}{10^3 . 10} = 10\,m$!

L'experience marche en théorie avec un verre de 10 m de hauteur!
(essayez si vous en trouvez un...)

exercice 8

La poussée d'Archimède dépend : - de la masse du poisson.
- du volume du poisson

- quand le poisson meurt sa vessie augmente de volume mais la masse du poisson reste inchangée.

$$V \nearrow \Rightarrow \vec{\Pi} \nearrow \text{ (à masse égale)}$$

donc le poisson est poussé vers la surface.

Il flotte le ventre à l'air car la vessie est dans l'abdomen.

Exercice 9

1) Le glaçon est à l'équilibre ⇒ $\vec{\Pi}+\vec{P}=\vec{0}$ ⇒ $-V_i\,\rho_e\,\vec{g}+V\rho_g\,\vec{g}=\vec{0}$

⇒ $V_i\,\rho_e = V\rho_g$ ⇒ $\boxed{V_i = V\frac{\rho_g}{\rho_e}}$

Il y a conservation de la masse d'eau lors de la fonte du glaçon ⇒ $\boxed{\rho_g V = \rho_e V'}$

⇒ $V' = \frac{\rho_g}{\rho_e}V = \frac{\rho_g}{\rho_e}\,V_i\,\frac{\rho_e}{\rho_g}$ ⇒ $\boxed{V'=V_i}$

2) $V'=V_i$ ⇒ L'eau reste au même niveau, le verre est toujours rempli à ras bord

⇒ il n'est pas nécessaire de prévoir une éponge.

Cas du whisky : $\vec{\Pi}+\vec{P}=\vec{0}$ ⇒ $V_i\,\rho_w = V\rho_g$ → $\boxed{V = V_i\,\frac{\rho_w}{\rho_g}}$

Lors de la fonte du glaçon, on a toujours : $\rho_g V = \rho_e V'$ ⇒ $V' = \frac{\rho_g}{\rho_e}V$

⇒ $V' = \frac{\cancel{\rho_g}}{\rho_e}\,V_i\,\frac{\rho_w}{\cancel{\rho_g}}$ ⇒ $\boxed{V' = V_i\,\frac{\rho_w}{\rho_e}}$ $\rho_w < \rho_e$ ⇒ $\boxed{V' < V_i}$

⇒ Le niveau du liquide baisse lors de la fonte du glaçon ⇒ pas d'éponge nécessaire.

Exercice 10

Deux approches sont possibles dans le bilan des forces :

▷ ou bien prise en compte explicite des forces de pression sur la face supérieure et inférieure du cylindre (il y a compensation par symétrie sur les faces latérales) ;

▷ ou bien prise en compte de la poussée d'Archimède

! Ces deux approches sont incompatibles : la poussée d'Archimède, par définition, EST la résultante des forces de pression.

Q1

Bilan des forces :

- ▷ Poussée d'Archimède : le volume de cylindre immergé dans l'eau vaut Sz, donc en négligeant l'effet de l'air la poussée d'Archimède s'écr $-\rho_0 S h g\,\vec{e}_z$
- ▷ Poids du flotteur : $\rho SH\,g\,\vec{e}_z$.

Le PFS appliqué au flotteur projetté sur l'axe (Oz) donne

$$0=-\rho_0 S h g+\rho S H g$$

On en déduit : $\boxed{\frac{h}{H}=\frac{\rho}{\rho_0}}$

si $\rho<\rho_0$, le flotteur flotte

Q2 le principe fondamental de la dynamique appliqué au flotteur donne :

$$\rho H S\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\rho_0\,S z\,g+\rho\,S H\,g\,. \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\rho_0 g}{\rho H}z = g\,.$$

On identifie l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^2 = \frac{\rho_0 g}{\rho H}$$

d'où on déduit la période

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\rho H}{\rho_0 g}}\,.}$$

Exercice 11

1 Relation de la statique des fluides (z vers le haut) :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

Avec l'équation d'état des gaz parfaits,

$$PV = \frac{m}{M_\mathrm{a}} RT \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \frac{M_\mathrm{a} P}{RT}$$

En séparant les variables,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{M_\mathrm{a} P}{RT} g \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_\mathrm{a} g}{RT_0} \frac{\mathrm{d}z}{1-\alpha z} = \frac{M_\mathrm{a} g}{\alpha R T_0} \left(\frac{-\alpha \mathrm{d}z}{1-\alpha z} \right).$$

On intègre ensuite entre l'altitude 0 et l'altitude z, ce qui donne

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = \frac{M_\mathrm{a} g}{\alpha R T_0} \ln \frac{1-\alpha z}{1}$$

et on trouve enfin en prenant l'exponentielle

$$\boxed{P(z) = P_0 (1-\alpha z)^\beta \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{M_\mathrm{a} g}{\alpha R T_0}.}$$

2 D'après la question précédente, il vient directement

$$\boxed{\rho(z) = \frac{M_\mathrm{a} P(z)}{RT(z)} = \frac{M_\mathrm{a} P_0}{RT_0} (1-\alpha z)^{\beta-1}}$$

3 L'hélium est en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère, c'est-à-dire à même pression et température, donc la loi des gaz parfaits donne

$$n_\mathrm{He} = \frac{P(z) V_0}{RT(z)} = \frac{P_0 (1-\alpha z)^\beta V_0}{R T_0 (1-\alpha z)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{m_\mathrm{He} = \frac{P_0 V_0 M_\mathrm{He}}{R T_0} (1-\alpha z)^{\beta-1}.}$$

4 Le ballon subit son poids $m_0 \vec{g}$, celui de la charge $m \vec{g}$, celui de l'hélium $m_\mathrm{He} \vec{g}$ et la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_\mathrm{A}(z) = -\rho(z) V_0 \vec{g}.$$

La masse maximale qu'il peut emporter à l'altitude z se traduit par une condition d'équilibre : le ballon est immobile car trop lourd pour monter davantage. Ainsi, en projection sur $\vec{e}_z$,

$$m_0 \cancel{g} + m_\mathrm{max}(z) \cancel{g} + \frac{P_0 V_0 M_\mathrm{He}}{R T_0} (1-\alpha z)^{\beta-1} \cancel{g} - \frac{M_\mathrm{a} P_0}{R T_0} (1-\alpha z)^{\beta-1} V_0 \cancel{g} = 0$$

soit

$$m_0 + m_\mathrm{max}(z) + \frac{P_0 V_0}{R T_0} (M_\mathrm{He} - M_\mathrm{a}) (1-\alpha z)^{\beta-1} = 0$$

ou encore

$$\boxed{m_\mathrm{max}(z) = \frac{P_0 V_0}{R T_0} (M_\mathrm{a} - M_\mathrm{He}) (1-\alpha z)^{\beta-1} - m_0.}$$

5 Numériquement, pour $T_0 = 15\,°\mathrm{C}$, je trouve

$$\boxed{m_\mathrm{max}(z{=}0) = 34\,\mathrm{kg} \qquad \text{et} \qquad m_\mathrm{max}(z{=}10\,\mathrm{km}) = 11\,\mathrm{kg}.}$$