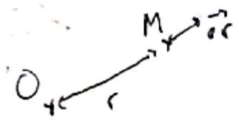
Chapitre 19 :
Mouvement dans un champ à forces centrales conservatif

I Point materiel soumis à un champ de force centrale

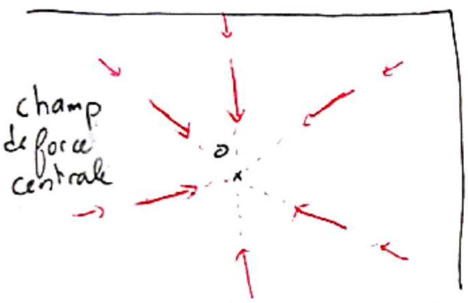
I.1) Définition

On dit qu'un point M est soumis à une force centrale $\vec{F}$ conservative de centre O si $\vec{F}$ est de la forme

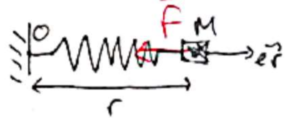
$$\underline{\vec{F} = F(r)\vec{e_r}} \quad \text{où} \quad \vec{e_r} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} \quad \text{et } r = OM$$



exemples :



- force gravitationnelle : m_1, m_2, $\vec{F_{1/2}}$, $\vec{e_r}$; $\vec{F_{1/2}} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\vec{e_r}$
- force électrostatique : q_1, q_2, $\vec{F_{1/2}}$, $\vec{e_r}$; $\vec{F_{1/2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$ (ici $q_1q_2 > 0$)
- force de rappel :



$\vec{F} = -k(r - l_0)\vec{e_r}$ (souvent $r = x$, $\vec{e_r} = \vec{e_x}$)

I.2) Moment cinétique

a) Conservation du moment cinétique

Système {point matériel} Réf : TSG BDF : $\vec{F} = F(r)\vec{e_r}$ (centre O) (seulement $\vec{F}$)

TMC : $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e_r} \wedge F(r)\vec{e_r} = \vec{0}$

$\|\vec{OM} \wedge \vec{F}\| = \|\vec{OM}\| \, \|\vec{F}\| \times \underbrace{\sin(\text{angle entre } \vec{OM} \text{ et } \vec{F})}_{0}$

$\sin(0) = 0$

donc $\vec{L_O} = \vec{cste}$ ← indépendant de t

b) Conséquences

1ère : $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{cste} = \vec{OM_0} \wedge m\vec{v_0}$ $\forall t$ ⟹ $\forall t$ $\boxed{\vec{OM} \text{ et } \vec{v} \perp \text{ au même vecteur fixe } \vec{L_O}}$

M_0 position initiale ; $\vec{v_0}$ vitesse initiale

$\boxed{\text{on en déduit que le mouvement reste en permanence dans le plan} \perp \text{à } \vec{L_O}}$ ♡ $\boxed{\text{donc ds le plan contenant } \vec{OM_0} \text{ et } \vec{v_0}}$

2ème : en coordonnées cylindriques $\vec{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}}$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}}$

$$\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} m\dot{r} \\ mr\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\dot{\theta} \end{pmatrix}_{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}} = \underline{mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}}$$

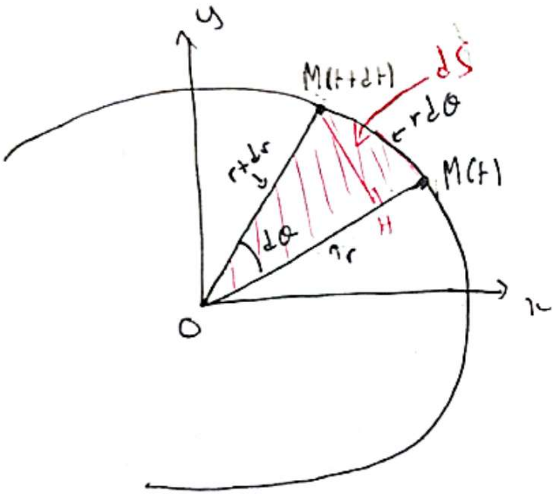
Or $\vec{L_O} = \text{cste} \Rightarrow \|\vec{L_O}\| = \text{cste} \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = \text{cste}$

Comme m est constante alors on définit $C = \dfrac{L_O}{m} = \text{cste}$

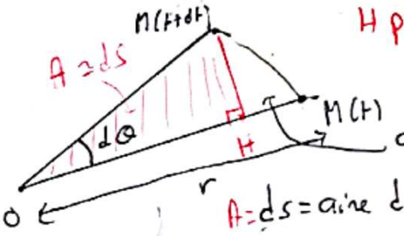
$$\boxed{\begin{array}{c} C = r^2\dot{\theta} = \text{cste} \\ \text{↳ constante des aires} \end{array}}$$

Interprétation physique

Pour un mouvement elliptique



l'aire dS balayée par $\vec{OM}$ entre t et t+dt peut être approximée :



H projeté orthogonal de $M(t+dt)$ sur $\vec{OM}(t)$

aire négligeable devant A

$A \approx dS$ = aire du triangle $OM(t)H$ rectangle en H si $dr \ll r$, $d\theta \ll \theta$

$dS \simeq \dfrac{1}{2}$ base × hauteur

$dS = \dfrac{1}{2} OH \times HM(t+dt)$

$OH \simeq OM(t) = r$

$HM(t+dt) = OH\sin(d\theta) \simeq OH\,d\theta \simeq r\,d\theta$ finalement $dS = \dfrac{1}{2}r^2 d\theta$

et $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}C = \text{cste}}$ car $\|\vec{L_O}\| = \text{cste}$

↳ Les aires balayées $S(t) = \dfrac{1}{2}Ct + \text{cste}$ sont proportionnelle à t

---

Lorsque M est soumis à une force centrale

$\vec{OM}(t)$ balaye des aires égales pdt des durées égales ⇒ $2^{\text{ème}}$ loi de Kepler !

Voc : $\dfrac{dS}{dt}$ est la vitesse aréolaire

I.3 Aspect énergétique

a) Conservation de l'énergie mécanique

Système : {point materiel}, Ref supposé galiléen, BDF : $\vec{F} = f(r)\vec{e_r}$

$\vec{F}$ est conservative $\Rightarrow$ TEM donne $\Delta E_m = 0 \Rightarrow$ $E_m = cste$

(son travail est indep du chemin suivi)

b) Energie potentielle effective

$E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$ ← pas forcement E_{pp} !

$\vec{OM} = r\vec{e_r}$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\,(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})\cdot(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$

$\vec{e_r}\cdot\vec{e_\theta} = 0$

$\vec{e_r}\cdot\vec{e_r} = 1$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$$

donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r)$ 2 variables r et θ

on aimerait avoir r comme seule variable (se ramener à un mouvement à 1D)

On utilise alors $L_0 = cste = mr^2\dot{\theta} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{L_0}{mr^2}}$

ainsi $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L_0}{mr^2}\right)^2 + E_p(r)$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mr^2} + E_p(r)}_{E_{peff}(r)}}$$

on a alors $E_m = f(r, \dot{r}, \cancel{\theta})$

$\boxed{E_{peff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + E_p(r)}$ est l'énergie potentielle effective du système

elle permet de déterminer graphiquement le mouvement radial

II Exemple du champ de force Newtonien

celle que nous allons étudier

II.1) Définition

Un champ de force est dit Newtonien lorsque $\vec{F} = F(r)\vec{e_r}$ est telle que $\boxed{F(r) = \frac{K}{r^2}}$ avec $K = cste$

exemple pour $\vec{F}_{grav} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\vec{e_r}$

ou $\vec{F}_{coulomb} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

II.2) Description qualitative du mouvement

a) Energie potentielle effective

$$\vec{F}(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e_r} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\vec{e_r} \Leftrightarrow E_p(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r} + \underbrace{cste}_{0}$$

0 par avoir $E_p(r \to +\infty) = 0$

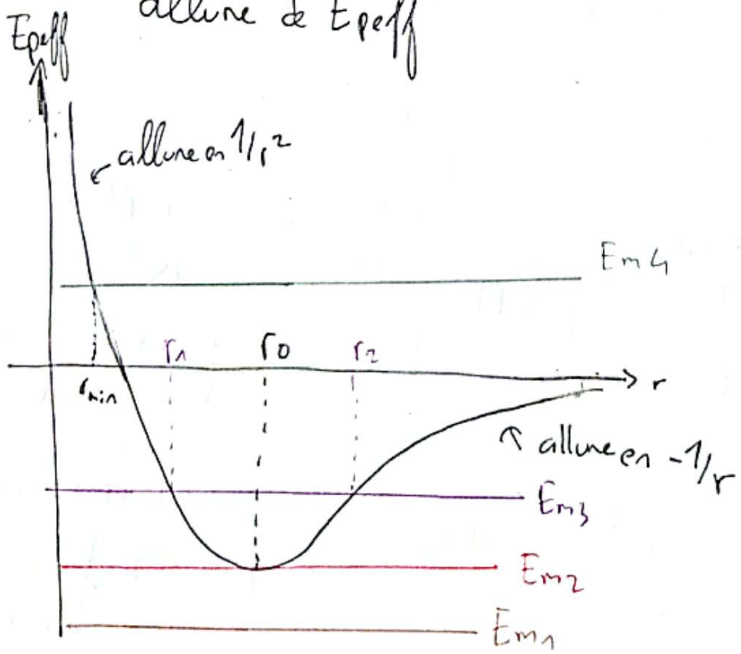
ainsi $E_m(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$

avec $E_{peff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$

rmq . $\frac{1}{r^2}\frac{L^2}{2m} \gg \frac{G m_1 m_2}{r}$ si $r \to 0$ donc $E_{peff} \simeq \frac{L_0^2}{2mr^2}$ si $r \to 0$

. $\frac{1}{r^2}\frac{L^2}{2m} \ll \frac{G m_1 m_2}{r}$ si $r \to \infty$ donc $E_{peff}(r) \simeq -\frac{G m_1 m_2}{r}$ si $r \to +\infty$

allure de Epeff

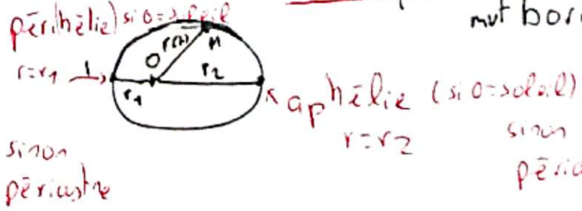


b) états liés et états de diffusion

① si $E_m = E_{m1} < E_{peff}$ impossible

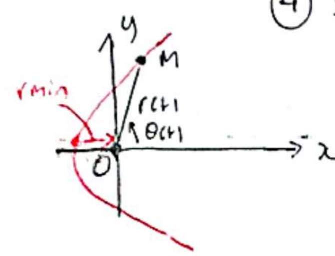
② si $E_m = E_{m2} \Rightarrow r = cste \Rightarrow$ le mouvement est circulaire (état lié) mvt borné

③ si $E_m = E_{m3} \Rightarrow r \in [r_1, r_2]$ mouvement elliptique (état lié) mvt borné



④ si $E_m = E_{m4}$ $r \in [r_{min}, +\infty[$

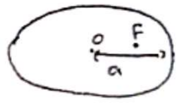
état de diffusion trajectoire non bornée



II.3) Lois de Kepler

voir poly

1ère loi (des orbites) ⚠ ne pas confondre O et F



2ème loi (des aires) :

conséquence de 2ème loi : $v \nearrow$ lorsque la planète se rapproche de l'astre attracteur

3ème (des périodes)

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$$

on montre que $\text{cste} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$

II.4) Cas particulier du mouvement circulaire d'une planète ou d'un satellite

a) Vitesse

système : { planète ou satellite de masse m en translation circulaire de rayon R autour d'un astre attracteur de masse M ou S }

Réf : . Pour satellite autour de Terre : géocentrique supposé galiléen

. Pour planète autour de Soleil : héliocentrique supposé galiléen

BdF : $\vec{F} = -\dfrac{GmM}{R^2}\vec{e_r}$

. $\vec{OM} = R\vec{e_r}$

. $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{R}\vec{e_r} + R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = v\vec{e_\theta}$ — 0 car mvt circulaire

. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \dfrac{v^2}{R}\vec{e_r}$ (Rappel : $R\dot{\theta}^2 = \dfrac{v^2}{R}$)

PFD appliqué au système $m\vec{a} = \vec{F}$ => projection sur $\vec{e_r}$:

$$-\frac{mv^2}{R} = -\frac{GmM}{R^2}$$

finalement $\boxed{V = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}}$ (♡) ← indep de M et mouvement uniforme (preuve par le TPC ou projection du PFD sur $\vec{e_\theta}$)

b) Période de révolution T

$$V = \frac{\text{périmètre}}{T} = \frac{2\pi R}{T} \iff \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$v = \dfrac{d}{\Delta t}$ seulement si mvt uniforme

Rmq : on retrouve la 3ème loi de Kepler $T^2 = 4\pi^2\dfrac{R^3}{GM} \iff \boxed{\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}}$

(avec ici $a = R$)

Scanné avec CamScanner

c) Energie mécanique

$\cdot\ E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\cancel{\dot{R}}^2 + (R\dot{\theta})^2) = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{R}}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}\frac{mMG}{R}}$

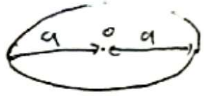
0 mvt circulaire

$\cdot\ E_{pgrav} = -\frac{GmM}{R}$ (Rmq $E_c = -2E_{pgrav}$)

Donc $\boxed{E_m = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{R}}$ Pour un mouvement circulaire

Rmq1: $E_m < 0 \rightarrow$ cohérent avec le graphe de $E_{peff}(R)$

Rmq2: pour une ellipse de demi-grand axe a



$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{a}$$

III Applications

III.1) Vitesses cosmiques

a) Vitesse de satellisation

On appelle vitesse de satellisation ou vitesse en orbite basse v_s la vitesse minimale à fournir à un objet initialement immobile pour le mettre en orbite rasante (orbite de rayon $R = R_T$)
↳ pour la Terre

D'après le II. 4) a) $\Rightarrow \boxed{v_s = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}}$ (pour la Terre)

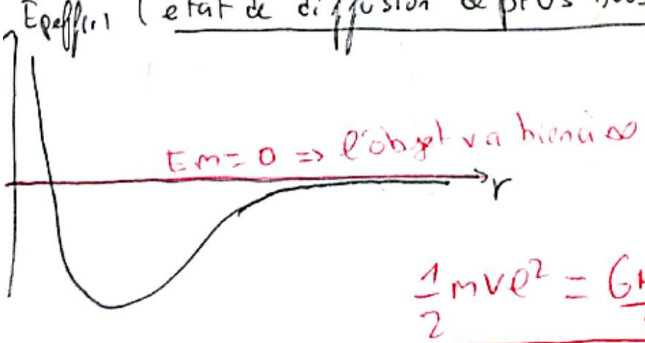
si $v < v_s$ l'objet retombe sur l'astre

A.N (Pour Terre) $v_s = \sqrt{\frac{6{,}67\,10^{-11} \times 6{,}0\times10^{24}}{6400\times10^{6}}} \Rightarrow v_s = 8\ km/s = 30000\ km\,h^{-1}$

Pour lune : v_s lune $= 1{,}7\ km/s$

b) Vitesse de libération

On appelle vitesse de libération v_e la vitesse minimale qu'il faut fournir à un objet pour qu'il s'échappe de l'attraction gravitationnelle de la terre (état de diffusion de plus basse énergie mécanique)



$$E_m = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GM_Tm}{R_T}}_{\text{énergie mécanique de l'objet à l'instant où il est lancé à la surface de la terre à la vitesse } v_e} = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GM_Tm}{R_T}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2}\,v_s}$$ ♡

A.N : $v_l = 11 \text{ Km/s} \simeq 40000 \text{ Km/h}$ (pour terre)

c) Rayon de schwarzschild d'un trou noir

Soit un trou noir de masse M et centre O. On appelle Rayon de schwarzschild, horizon des evenements ou simplement Rayon du trou noir la distance $OM = R_S$ telle qu'un objet placé en M possède une vitesse de libération égale à la célérité de la lumière ds le vide

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM_s}{R_S}} = c \Rightarrow \boxed{R_S = \frac{2GM_s}{c^2}}$$

Tout objet à une distance $OM < R_S$ du centre ne peut se libérer de l'attractº gravitationnelle du trou noir

III.2) Satellites géostationnaire

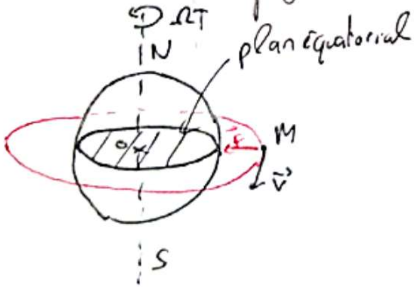
a) Définition

Un satellite géostationnaire reste toujours au dessus du m̂ point de la surface de la Terre

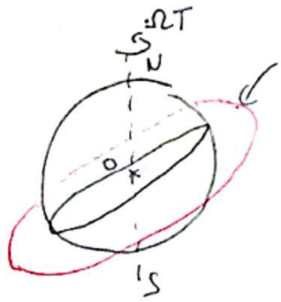
utilité : télécommunication, météorologie

b) Conséquences

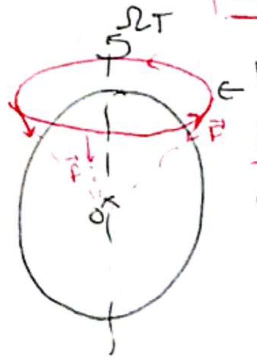
① BdF ds le réf géocentrique : $\vec{F} = -\frac{GmM_T}{R^2}\vec{e_r}$ centrale $\Rightarrow$ son mouvement est plan (cf I.1 b)



Le plan du mouvement est un plan contenant $\vec{OM}$ et $\vec{V}$ notament contenant O $\Rightarrow$ le mouvement s'effectue donc dans le plan équatorial



trajectoire impossible m̂ si elle plan du mvt contient O car le satellite ne peut pas rester à la verticale du m̂ point sur Terre



← trajectoire impossible car O ∈ plan du mouvement

2ème csq : $T_{satellite} = T_{Terre} = \underbrace{1 \text{ jour sidéral}}_{23h56min04s} \simeq 24h \neq 1 \text{ jour solaire} = 24h$

et $\boxed{\dot{\theta}_{satellite} = \Omega_{Terre}}$

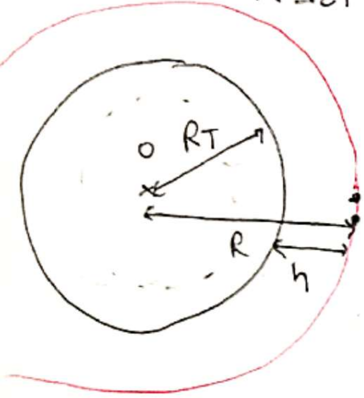
Sinon pas possible de rester à la verticale du mpt

↳ vitesse angulaire que la terre donc mouvement uniforme

3ème csq : comme $V = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R}}$

et $V = R\dot{\theta} = R\Omega_T$ avec $\Omega_T = \dfrac{2\pi}{T_{Terre}}$

$$R\Omega_T = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} \Leftrightarrow R^2\Omega_T^2 = \frac{GM_T}{R} \Leftrightarrow R^3 = \frac{GM_T}{\Omega_T^2} = \frac{GM_T T_{Terre}^2}{4\pi^2}$$



$$R = \left(\frac{GM_T T_{Terre}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

et l'altitude h du satellite vaut

$h = R - R_T$

$$\boxed{h = \left(\frac{GM_T T_{Terre}^2}{4\pi^2}\right) - R_T}$$

A.N $\underline{h = 36000 km}$

À retenir : un satellite géostat. a un mouvement circulaire uniforme de période T_{Terre} = 1 jour sidéral ($\simeq$24h) dans le plan de l'équateur à une altitude $\underline{h = 36000 Km}$

Rmq : l'orbite géostat est <u>encombrée</u> ! (Plus de 300 satellites)

video 1,07 à 1,50
spot 4 5,56 à 6,50
Geostat 8,37 10,3