TD19 – MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRALE CONSERVATIF

Pour tout le TD, on donne $G=6,67.10^{-11}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

Dans toutes les questions suivantes, on considère un système assimilé à un point matériel de masse m soumis à un champ de force centrale conservative de centre O du type $\vec{F}=F(r)\vec{e}_r$ dans un référentiel supposé galiléen.

1 Montrer que le moment cinétique se conserve.
2 Sans démonstration (réponse efficace attendue) quelles sont les deux conséquences de la conservation du moment cinétique ?
3 Etablir que le mouvement est plan. Préciser ce plan.
4 Etablir la loi des aires en utilisant la conservation du moment cinétique.
5 Justifier que l'énergie mécanique se conserve.
6 Exprimer l'énergie mécanique du système en utilisant la notion d'énergie potentielle effective.
7 On s'intéresse à l'énergie potentielle effective $E_{peff}(r)$ pour un champ Newtonien.
   a Représenter l'allure de $E_{peff}(r)$.
   b Décrire la nature du mouvement du système pour différentes valeurs d'énergie mécanique.
   c Pour quelles valeurs de l'énergie mécanique a-t-on un état de diffusion ?
8 Enoncer les trois lois de Kepler.
9 On s'intéresse au cas particulier où le mouvement est circulaire.
   a Montrer que le mouvement est uniforme (de vitesse v_0), et exprimer v_0 en fonction de G, M et R.
   b Etablir la troisième la loi de Kepler.
   c Etablir l'expression de l'énergie mécanique du système. Généraliser cette expression pour un mouvement elliptique.
10 Donner l'expression de la vitesse de satellisation d'un astre (ou vitesse en orbite basse). Donner sa valeur pour la Terre.
11 Etablir l'expression de la vitesse de libération d'un astre. Donner sa valeur pour la Terre.
12 On s'intéresse aux satellites géostationnaires.
   a Donner la définition d'un satellite géostationnaire.
   b Justifier sa localisation dans le plan équatorial.
   c Quelle est la période de révolution d'un satellite géostationnaire autour de la Terre ? Justifier.
   d Montrer que le mouvement d'un satellite géostationnaire est circulaire uniforme.
   e Etablir l'expression de l'altitude h d'un tel satellite. Quelle est la valeur numérique de h ?

Exercice 2 : Secret Story

Vous rentrez de cours et décidez, pour vous détendre, d'allumer la télévision. Vous tombez alors sur l'émission Secret Story. Les candidats sont en train de jouer à un jeu de culture générale. À la question : « pourquoi fait-il froid l'hiver ? », Jean-Kevin, dont le secret est « j'ai fait une année de PCSI », répond :

« Trop facile ! D'après la première loi de Kepler, l'orbite de la Terre autour du soleil n'est pas circulaire mais elliptique, la Terre se trouve donc à différents moments de l'année plus ou moins proche du Soleil. Il fait froid l'hiver parce que la Terre est plus éloignée du Soleil l'Hiver ! »

Expliquez pourquoi il n'est pas étonnant que Jean-Kevin ait fini à Secret Story et pas en École d'ingénieur…

Exercice 3 : Troisième loi de Kepler

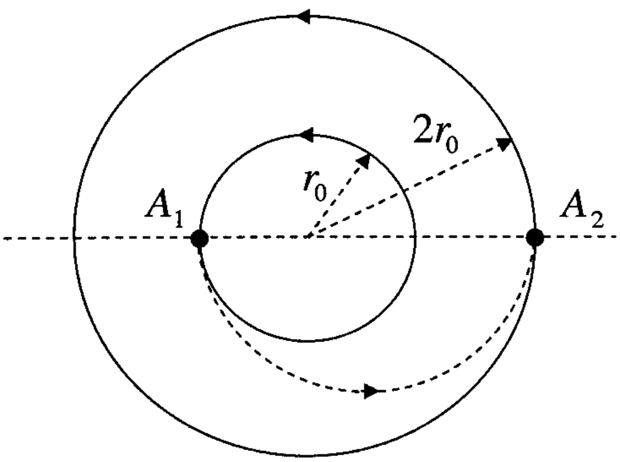
1 La Terre se situe à une distance de 150 millions de kilomètres du soleil, et fait un tour autour de celui-ci en un an. En déduire la masse du Soleil.
2 La Lune tourne autour de la Terre en 27,3 jours. La masse de la Terre vaut $M_T=6,0.10^{24}$kg. En déduire la distance Terre-Lune.

Exercice 4 : Hipparcos

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse m=1,1t. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Centre de la Terre-Satellite varie entre d_P=6580km au périgée et d_A=42,3.10^{3}km à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : v_A=3,5.10^{2}m.s^{-1}. On donne M_T=6,0.10^{24}kg.

1 Exprimer le demi grand axe a de la trajectoire elliptique d'Hipparcos en fonction de d_P et d_A. Faire l'application numérique.
2 Exprimer l'énergie mécanique en fonction de la masse de la Terre M_T, G, m, d_P et d_A. Faire l'application numérique.
3 Exprimer puis calculer la période de révolution d'Hipparcos autour de la Terre.
4 En utilisant la conservation du moment cinétique, calculer v_P. Commenter.

Exercice 5* (important) : Transfert d'orbites d'un satellite



On veut porter un satellite de la trajectoire circulaire $r_1=r_0$ où sa vitesse est v_0 à la trajectoire circulaire $r_2=2r_0$ grâce à un réacteur (on suppose cependant que la masse m du satellite reste constante). En un point A_1, cela revient à lui communiquer de l'énergie afin qu'il atteigne une vitesse $v'_1>v_0$ de telle façon qu'il décrive une ellipse (dite de transfert) de grand axe A_1A_2 (la variation de vitesse se produit sur une durée suffisamment brève pour pouvoir considérer que pendant cette variation la vitesse garde la même direction et que l'altitude ne change pas). Il arrive en A_2 avec une vitesse v'_2. On lui communique alors de nouveau de l'énergie afin qu'il atteigne une vitesse v_2 (toujours de façon quasi instantanée) pour qu'il décrive une trajectoire circulaire de rayon r_2.

Exprimer v'_1, v'_2 et v_2 en fonction de v_0 uniquement.

Exercice 6 (* partie VI) : Extrait Concours Centrale Supélec

Quelques aspects de l'astronautique

Les vecteurs seront notés en caractères gras : par exemple le vecteur $\vec{V}$ est noté **V** *et sa norme V.*

Partie V - Vaisseau spatial dans un champ newtonien

On considère un vaisseau supposé ponctuel de masse m, mobile par rapport à un astre de masse M de centre O et de rayon R. Le champ de gravitation de cet astre est à symétrie sphérique. La constante de gravitation est notée G. La distance entre le vaisseau et le centre de l'astre est r, $r > R$. On se placera dans le référentiel (supposé galiléen) lié à l'astre. Sauf mention contraire, le moteur fusée est éteint, c'est-à-dire que le vaisseau est en vol balistique.

V.A - Montrer que le moment cinétique $\boldsymbol{L}_0$ (calculé en O) du vaisseau est une constante du mouvement.

V.B - Cette constance de $\boldsymbol{L}_0$ a deux conséquences sur la trajectoire du vaisseau : lesquelles ?

V.C - Déterminer le champ gravitationnel $\boldsymbol{g}(P)$ créé par l'astre en un point P extérieur à l'astre à la distance r de O en fonction de G, M, r et du vecteur $\boldsymbol{OP}$.

V.D - En déduire l'énergie potentielle E_p du vaisseau en fonction de G, M, m et r en la choisissant nulle à l'infini.

V.E - Dans le cas d'une orbite circulaire de rayon r_0, exprimer l'énergie mécanique E_m du vaisseau et sa période de révolution T_{rev} en fonction de G, M, r_0 et, si nécessaire, m. Commenter le signe de E_m.

V.F - Dans le cas où l'astre est notre Terre, on considère une masse de $1\ \text{kg}$, initialement au repos à la surface de la Terre (rayon $R_T = 6400\ \text{km}$), puis placée sur une orbite circulaire de rayon $r_0 = 7000\ \text{km}$. En prenant g_0 l'intensité du champ gravitationnel terrestre, au niveau du sol, égale à $10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, évaluer numériquement la différence d'énergie mécanique ΔE_m entre ces deux états.

V.G - 1 « kilowatt-heure » électrique revient environ à 0,15 € ; en déduire numériquement le coût théorique de la satellisation d'un kg de charge utile. Le coût réel est de l'ordre de 1000 € par kg. Commenter ces valeurs.

On peut montrer que la trajectoire d'un vaisseau (moteur coupé) dans le champ gravitationnel de l'astre est une conique, d'équation polaire $1/r = (1 + e\cos\theta)/p$, où e est l'excentricité de la conique et p le paramètre. On se limitera ici au cas où la trajectoire est fermée, donc elliptique.

V.H - Dessiner l'allure de la trajectoire du satellite en plaçant l'astre attracteur, l'apogée et le périgée. Exprimer le demi-grand axe a de l'ellipse en fonction de e et p.

V.I - Donner la relation entre la période orbitale T_{orb}, le demi-grand axe a, G et M (troisième loi de Kepler).

Partie VI - Vitesse de libération

VI.A - Le vaisseau est initialement sur une orbite circulaire de rayon r_0 décrite à la vitesse V_0. On allume le moteur pendant un temps court, de sorte que la vitesse varie mais pas la distance au centre de l'astre. Évaluer la vitesse V_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre en fonction de G, M et r_0.

VI.B - Le commandant de bord dispose en fait d'un « budget de vitesse » ΔV égal à $4V_0$; cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesses n'excède pas $4V_0$.

VI.B.1) **option 1** : le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale à $5V_0$. Évaluer sa vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de V_0.

VI.B.2) **option 2** : on utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de Vo à $V_0/2$ en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction. Décrire la nouvelle trajectoire : le demi-grand axe a, les distances r_A du centre O à l'apogée et r_P du centre O au périgée, les normes des vitesses V_A et V_P à l'apogée et au périgée en fonction de r_0. Quelle condition doit vérifier r_P ?

VI.B.3) On utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage au périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de V_0.

VI.B.4) Comparer les deux options, et commenter.

Exercice 7* : Démonstration de E_m sur une ellipse (important, revient souvent aux concours)

On considère un satellite en orbite elliptique autour de la Terre (située en O, de masse M_T). On appelle r_a la distance entre le satellite et la Terre à son apogée, et r_p la distance entre le Satellite et la Terre à son périgée.

1. Montrer, en utilisant la conservation de l'énergie mécanique, que r_a et r_p sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2+\alpha r+\beta=0$. Exprimer α et β en fonction de m, L_O, $E_{m,t}$, G et M_T.

2. En déduire l'expression de $E_{m,t}$ en fonction de m, a, G et M_T. Commenter son signe.

3. En déduire l'expression de $E_{m,t}$ en fonction de m, a, R_T et g_0 où R_T est le rayon de la Terre et g_0 l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre.

Exercice 8 Action des forces de frottement sur un satellite en orbite circulaire

Soit un satellite (masse *m*) en orbite circulaire de rayon $R + h$ (R rayon terrestre).

a Établir une relation simple entre l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du satellite.

b Les forces de frottement sur les hautes couches de l'atmosphère, de résultante $f_d=\frac{m\alpha v^2}{h}$ dirigée suivant $-\vec{v}$, produisent sur une révolution une très petite variation Δh de l'altitude. La trajectoire reste donc pratiquement circulaire sur un tour.

a Comment varie l'énergie mécanique du satellite? Montrer que la vitesse du satellite, ainsi freiné, augmente.

b Calculer Δv en fonction de Δh et de la période de révolution *T*. On montrera d'abord que pour une variation d'altitude *dh* correspondant à une variation de vitesse *dv*, on a $dv=\frac{-1}{2}\frac{GM_T}{(R+h)^2 v}dh$, *v* étant la vitesse du satellite à l'altitude *h*.

c Trouver la relation entre *a* et Δh et calculer le travail des forces de frottement W_{fd} sur un tour. On donne R = 6400 km, h = 300 km, m = 80 kg, Δh = -200 m, g_0 = 10 m.s^{-2}

Exercice 9 :Lois de Kepler

Les données ci-dessous concernent le mouvement orbital des planètes autour du Soleil. Pour Titan, satellite de Saturne, les données concernent son mouvement autour de Saturne.

Unité astronomique : 1 u.a. = demi-grand axe de l'orbite terrestre

Objet	**Demi-grand axe *a* (u.a.)**	**Période *T* (années)**	**Excentricité *e***
Vénus	0,72		0,007
Terre	1,00	1,00	0,017
Mars	1,52	1,88	0,093
Jupiter	5,20	11,86	0,048
Saturne	9,54	29,46	0,056
Titan	0,0082	0,044	0,029
Neptune	30,06	164,79	0,009
Pluton	39,43	248,6	0,248

1 Quelle est la masse de Saturne, exprimée en fonction de la masse du Soleil ?

2 Quelle est la période orbitale de Vénus ?

3 La comète de Halley (dernier passage en 1986) décrit une orbite elliptique autour du Soleil, de période T = 76 ans. Calculer son demi-grand axe.

En 1705, Edmond Halley, grâce aux lois de la gravitation nouvellement énoncées par Newton (1687), prédit le retour de la comète observée en 1682 pour l'année 1758, ce qui se produisit effectivement, malheureusement après sa mort (1742). Il avait montré que cette comète avait été observée en 1531 et 1607. On a retrouvé des témoignages du passage de la comète de Halley jusqu'en 239 avant J.C.