

PROGRAMME DE COLLES N° 22

Semaine du 24/03/2025 au 28/03/2025

👉 *Polynômes, analyse asymptotique* 👈

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 18 — Polynômes sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} —

Tout le chapitre.

1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K}

- 1.1 Polynôme, degré
- 1.2 Combinaisons linéaires, produit
- 1.3 Évaluation en un scalaire, fonction polynomiale associée, algorithme de HORNER pour l'évaluation polynomiale
- 1.4 Dérivation de polynômes

2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

- 2.1 Factorisation
- 2.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

3 Racines et factorisation

- 3.1 Racine, factorisation par $X - \alpha$
- 3.2 Racines multiples, ordre de multiplicité, caractérisation par l'annulation des dérivées
- 3.3 Application au nombre de racines
- 3.4 Polynômes scindés, relations coefficients-racines, et éléments simples
- 3.5 Théorème de D'Alembert-Gauss et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$
- 3.6 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

— Chapitre 19 — Comparaisons asymptotiques —

Nous n'avons encore pas fait de séance de TD, on se contentera de questions simples et guidées pour voir si les définitions sont connues.

1 Domination, négligeabilité

- 1.1 Domination
- 1.2 Négligeabilité
- 1.3 Réécriture des croissances comparées avec o
- 1.4 Opérations entre o ou entre O

2 Équivalence

- 2.1 Définition, premières propriétés

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 18. Formule de Taylor pour les polynômes.
- Chapitre 18. Formule $(PQ)' = P'Q + PQ'$.
- Chapitre 18. Proposition 12 (i) et (iii) : CNS pour que α soit de multiplicité m pour P avec le résultat préliminaire que α d'ordre $m \geq 1$ pour P implique α d'ordre $m - 1$ pour P' .

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre $x|x| \leq 3x + 2$, montrer que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$ sur $[0; 1]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - 3i$, les racines carrées de $3 - 4i$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, écrire $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$, de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, de $x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : $\int^x \cos t e^{2t} dt$, $\int_0^1 te^t dt$, $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**

Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}, \text{ savoir démontrer que } n!/n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.

Exemples : dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 e^{-x}$, $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x - y|$ pour tous x, y , $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$.