

## Devoir surveillé n°6

Durée : 2 h / La calculatrice **est autorisée**.

Le sujet comporte 4 pages et 2 problèmes indépendants. **Merci d'utiliser une nouvelle copie pour chaque problème.**

Le poids de chaque problème dans le barème total est indiqué en % dans son titre.

**Problème 1 : Le club de golf (30 %)**

Un club de golf est schématiquement composé de deux parties, rigidement liées entre elles : le manche et la tête de club. Le joueur tient le club avec ses mains par l'extrémité  $A$  du manche, et la tête de club est fixée à l'autre extrémité  $B$  et entre en contact avec la balle lors de l'impact (voir figure 1). Attention, dans tout l'énoncé, le mot « club » représentera l'ensemble {manche et tête de club}.

Le manche est une tige rectiligne sans épaisseur de longueur  $AB = L_c$  et le club possède un centre de gravité  $G_c$  qu'on considérera situé sur le manche, avec  $AG_c = h_c$ , une masse totale  $m_c$  et un moment d'inertie total  $J_c$  par rapport à un axe ( $Az$ ) perpendiculaire au plan de la figure passant par  $A$ . Il faut bien noter que la tête de club est prise en compte dans  $G_c$ ,  $m_c$  et  $J_c$ .

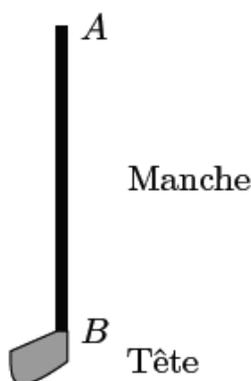


Figure 1

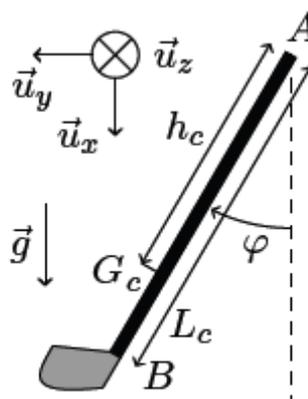


Figure 2

On cherche à déterminer expérimentalement  $AG_c = h_c$  et  $J_c$ .

1. Expliquer brièvement, en s'appuyant sur un ou deux schéma(s) simple(s) et clair(s), pourquoi, en tendant son index à l'horizontale et en s'arrangeant pour poser le club en équilibre dessus à l'horizontale, on détermine la position de  $G_c$ .

Afin de mesurer  $J_c$ , on réalise à l'aide du club un pendule pesant, en suspendant l'extrémité supérieure du manche (point  $A$ ) à un axe horizontal ( $Az$ ) fixe, par une liaison pivot sans frottement. On repère l'écart du club avec la verticale par l'angle  $\varphi$  (voir figure 2).

2. À l'aide du théorème du moment cinétique et en négligeant les frottements de l'air, établir l'équation différentielle du mouvement.

3. On mesure la période des petites oscillations (faible amplitude) :  $T_0 = 2,3$  s. Exprimer  $J_c$  en fonction de  $m_c$ ,  $g$ ,  $h_c$  et  $T_0$ . Application numérique avec  $m_c = 0,32$  kg,  $g = 9,8$  m s<sup>-2</sup> et  $h_c = 80$  cm (données typiques pour un club de type « driver », utilisé pour frapper les coups les plus longs).

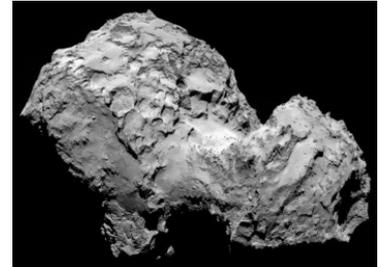
## Problème 2 : Atterrissage de Philae (70%)

Rosetta est une mission spatiale de l'Agence spatiale européenne dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil.

La sonde spatiale Rosetta s'est placée en orbite autour de la comète puis, après une période d'observation de plusieurs mois, a envoyé le 12 novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure.

Données :

- masse de la comète :  $m_{com} = 1,0 \cdot 10^{13} \text{ kg}$
- masse volumique de la comète :  $\mu_{com} = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- période de rotation propre de la comète :  $T_{com} = 12,4 \text{ h}$
- constante gravitationnelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- distance de largage par rapport au centre :  $r_{larg} = 22,5 \text{ km}$
- masse de la sonde Rosetta :  $m_{ros} = 1500 \text{ kg}$
- masse de l'atterrisseur Philae :  $m_{ph} = 98 \text{ kg}$
- vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



Dans cette partie, la comète est modélisée par une boule homogène de masse  $m_{com}$  et de masse volumique  $\mu_{com}$ .

La distance entre un point  $M$  et le centre  $O$  de la comète est notée  $r = OM$ .

A / Champ gravitationnel de la comète

1. Montrer que le rayon  $r_{com}$  d'une boule de même masse que la comète vaut  $r_{com} = 1,8 \text{ km}$ .

Le champ gravitationnel  $\vec{g}_{com}$  créé par la comète s'écrit  $\vec{g}_{com} = -G \frac{m_{com}}{r^2} \vec{e}_r$  (pour  $r > r_{com}$ ) où  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire porté par  $\overrightarrow{OM}$ .

2. Vérifier par analyse dimensionnelle l'homogénéité de la relation obtenue.
3. Peut-on considérer le champ gravitationnel de la comète uniforme lors de la chute du module Philae, suite à son largage ?

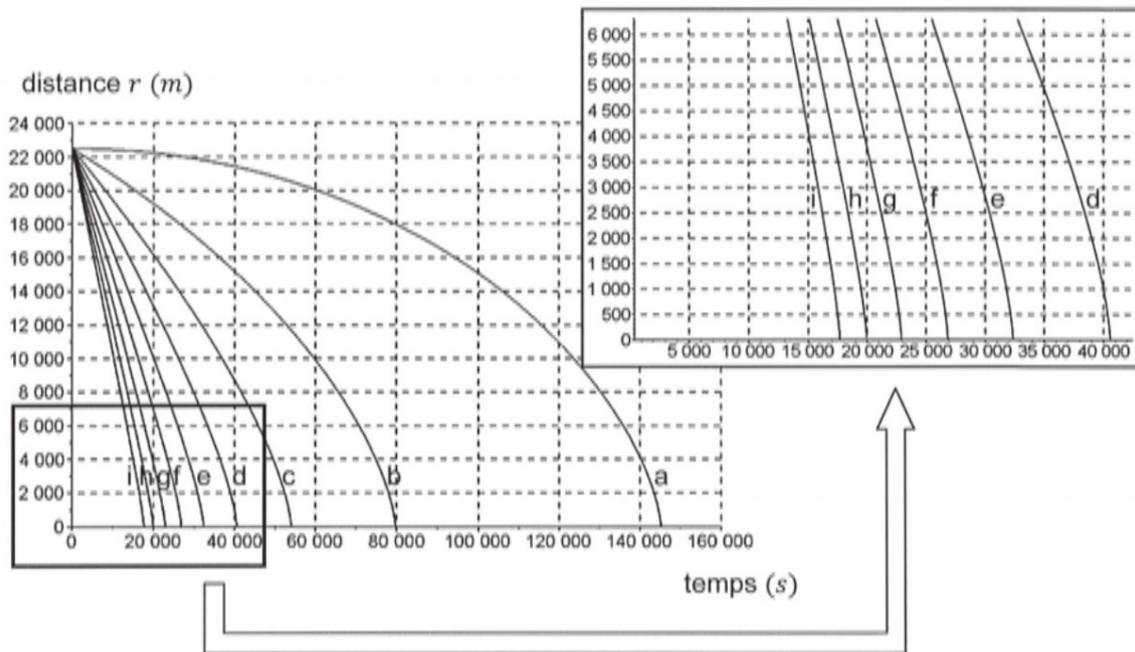
B / Trajectoire de Philae

Approche numérique de l'équation du mouvement

On étudie la chute libre de l'atterrisseur Philae, dans un référentiel dont l'origine est le centre  $O$  de la comète et qui tourne avec Rosetta, de sorte que le vecteur  $\vec{e}_r$  pointe constamment vers l'atterrisseur (accélération  $\vec{a} = \ddot{r} \vec{e}_r$ ). Ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

4. Établir l'équation du mouvement de l'atterrisseur Philae, une fois séparé de Rosetta, en projection sur l'axe radial.

Cette équation peut être résolue numériquement. L'évolution temporelle de la distance  $r$  est représentée sur la figure 1, à partir de la distance initiale  $r(t=0) = r_{larg}$ , pour différentes vitesses verticales initiales  $v_0 = \dot{r}(t=0)$ .

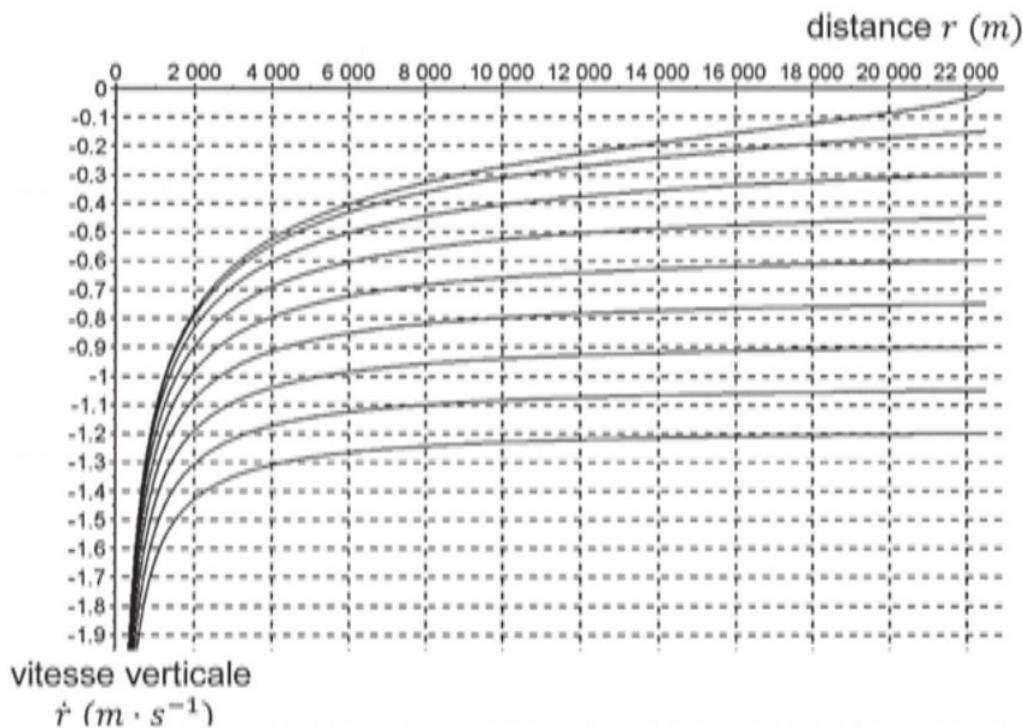


**Figure 1** - Evolution temporelle de l'altitude pour différentes vitesses initiales :

a : $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	b : $v_0 = -0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	c : $v_0 = -0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
d : $v_0 = -0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	e : $v_0 = -0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	f : $v_0 = -0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
g : $v_0 = -0,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	h : $v_0 = -1,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	i : $v_0 = -1,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

5. Déterminer la durée  $\tau_0$  de la chute de Philae s'il est abandonné par Rosetta avec une vitesse verticale nulle.
6. La durée réelle de la chute est  $\tau \approx 7h$ . En déduire la vitesse verticale initiale communiquée à l'atterrisseur.

Différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 2, en fonction de la vitesse verticale initiale.



**Figure 2** - Trajectoires de phase pour différentes vitesses initiales

7. Déterminer, par lecture graphique, la vitesse verticale atteinte par Philae au moment du contact avec la comète.

### Approche énergétique

L'objectif est de retrouver la vitesse atteinte par l'atterrisseur au moment du contact avec la comète.

8. Établir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle  $E_{p_{com}}$  d'un point matériel de masse  $m$  situé à la distance  $r > r_{com}$  du centre de la comète, en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $m_{com}$  et  $r$  (on fixe  $E_{p_{com}}(r \rightarrow \infty) = 0$ ).
9. Lors de la chute de Philae, préciser comment évolue l'énergie mécanique de l'atterrisseur.
10. En déduire, littéralement puis numériquement, la vitesse atteinte par l'atterrisseur lors du contact avec la comète.

### C / Philae à la surface de la comète

On s'intéresse à présent au module Philae, une fois celui-ci posé sur la surface de la comète.

11. Lors du largage de Philae, le 12 novembre 2014, plusieurs journalistes commentent l'événement : « Philae pèse 1,7 grammes sur la comète ». Qu'en pensez-vous ?

### D / Rosetta autour de la comète

Avant de larguer l'atterrisseur Philae, la sonde Rosetta s'est rapprochée par paliers de la comète. Le 10 septembre 2014, elle se situe sur une orbite circulaire de rayon  $r_1 = 30 \text{ km}$ .

12. Donner les expressions en coordonnées polaires des vecteurs vitesse et accélération d'un point matériel  $M$  en mouvement circulaire.
13. Déterminer la vitesse  $v_1$  de la sonde en orbite circulaire de rayon  $r_1$  autour de la comète, en fonction de  $G$ ,  $m_{com}$  et  $r_1$ . Effectuer l'application numérique.
14. En déduire sa période  $T_1$ . Effectuer l'application numérique.

La sonde parcourt, à partir du 8 octobre 2014, une orbite elliptique avec un apocentre  $A$  situé à la distance  $r_a = r_{max} = 20 \text{ km}$  du centre  $O$  de la comète et un péricentre  $P$  caractérisé par  $r_p = r_{min} = 10 \text{ km}$ . Le 15 octobre, la propulsion est utilisée pour placer la sonde sur une orbite circulaire de rayon  $r_p = 10 \text{ km}$ .

15. Représenter sur un schéma l'orbite elliptique, en faisant apparaître le centre  $O$  de la comète, ainsi que les distances  $r_a$  et  $r_p$ .
16. Exprimer l'énergie mécanique de la sonde sur l'orbite elliptique en fonction de  $r_a$  et  $r_p$  (on pourra établir dans un premier temps l'expression de  $E_m$  sur une orbite circulaire puis généraliser ce résultat à une orbite elliptique)
17. Sur cette orbite, en déduire la vitesse  $v_p$  de Rosetta en  $P$ , en fonction de  $G$ ,  $m_{com}$ ,  $r_a$  et  $r_p$ . Effectuer l'application numérique.
18. Pour placer la sonde en orbite circulaire de rayon  $r_p$ , la propulsion est utilisée lorsque Rosetta est au péricentre. Préciser numériquement la variation de vitesse nécessaire.