DS n°6 - Corrigé

Problème 2 : Atterrissage de Philae (e3a)

1. $V_{com}=\dfrac{m_{com}}{\mu_{com}}$.

On en déduit : $\dfrac{4}{3}\pi r_{com}^3=V_{com}=\dfrac{m_{com}}{\mu_{com}}\Rightarrow r_{com}=\left(\dfrac{3\,m_{com}}{4\pi\,\mu_{com}}\right)^{1/3}=1{,}8\,km$.

2. $\left[\dfrac{G\,m_{com}}{r^2}\right]=\dfrac{L^3\cdot M^{-1}\cdot T^{-2}\cdot M}{L^2}=L\cdot T^{-2}$, ce qui est bien la dimension de l'intensité de la pesanteur (exprimée en $m\cdot s^{-2}$).

3. Lors du largage : $g_{com}(r_{larg})=G\dfrac{m_{com}}{r_{larg}^2}=1{,}3.10^{-6}\,m\cdot s^{-2}$.

Au moment du contact : $g_{com}(r_{com})=\dfrac{G\,m_{com}}{r_{com}^2}=2{,}1.10^{-4}\,m\cdot s^{-2}$.

On obtient un $\boxed{\text{rapport supérieur à 150}}$ entre les deux valeurs, il est impossible de considérer le champ uniforme.

4. D'après le principe fondamental de la dynamique : $m_{ph}\ddot{r}\,\vec{e_r}=m_{ph}\overrightarrow{g_{com}}$.

En projection sur $\vec{e}_r$: $\ddot{r}+\dfrac{G\,m_{com}}{r^2}=0$.

5. Par lecture graphique (courbe a), on trouve $\tau_0\simeq 144000\,s\simeq 1\,j\,16\,h$

6. Graphiquement, une durée de chute $\tau=7\,h$ correspond à une vitesse initiale $\dot{r}(0)\simeq -0{,}75\,m\cdot s^{-1}$ (courbe f)

7. Avec la trajectoire de phase correspondant à $\dot{r}(r=r_{larg})=-0{,}75\,m\cdot s^{-1}$, on lit $\dot{r}(r=r_{com})=-1{,}1\,m\cdot s^{-1}$.

8. $\vec{F}=-G\dfrac{m_{com}\,m}{r^2}\vec{u_r}=-\overrightarrow{grad}\,Ep_{com}$ par définition.

En projection sur $\vec{u_r}$, on obtient : $-G\dfrac{m_{com}\,m}{r^2}=\dfrac{-\mathrm{d}\,Ep_{com}}{\mathrm{d}\,r}$

La primitive donne $E_{p_{com}}=\dfrac{-G\,m_{com}m}{r}+cte$ et comme $E_{p_{com}}(r\to\infty)=0$, on a finalement

$E_{p_{com}}(r)=\dfrac{-G\,m_{com}\,m}{r}$.

9. Philae n'est soumis qu'à des $\boxed{\text{forces conservatives, son énergie mécanique est constante}}$ pendant le chute.

10. $E_m(r=r_{larg})=E_m(r=r_{com})\Rightarrow \dfrac{1}{2}m_{ph}v_i^2-\dfrac{G\,m_{com}\,m_{ph}}{r_{larg}}=\dfrac{1}{2}m_{ph}v_f^2-\dfrac{G\,m_{com}\,m_{ph}}{r_{com}}$.

Ainsi, $\dfrac{1}{2}m_{ph}v_f^2=\dfrac{1}{2}m_{ph}v_i^2+G\,m_{com}\,m_{ph}\left(\dfrac{1}{r_{com}}-\dfrac{1}{r_{larg}}\right)$

$\Rightarrow v_f=\sqrt{v_i^2+2G\,m_{com}\left(\dfrac{1}{r_{com}}-\dfrac{1}{r_{larg}}\right)}$. Numériquement, $v_f=1{,}1\,m\cdot s^{-1}$. On retrouve la valeur déterminée par analyse du portrait de phase.

11. La masse de Philae est identique sur Terre et à la surface de la comète, c'est son poids qui est moins important.

$P = m_{ph} g_{com} = m_{ph} \dfrac{G m_{com}}{r_{com}^2} = 2{,}0.10^{-2} N$. Un objet à la surface de la Terre dont le poids est identique a une masse $m_{éq} = \dfrac{P}{g_0} = 2{,}0\, g$ ce qui correspond environ à la masse donnée par le journaliste.

12. Le vecteur position en coordonnées polaires est : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.
Pour un mouvement circulaire, r est constant donc $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$.

13. Le système étudié est la sonde Rosetta considérée comme un point matériel. D'après le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel cométocentrique supposé galiléen : $m_{ros}\vec{a} = m_{ros}\vec{g}_{com}$.

En projection sur $\vec{e}_r$, $-m_{ros}\dfrac{v_1^2}{r_1} = -m_{ros} g_{com} \Rightarrow \dfrac{v_1^2}{r_1} = \dfrac{G m_{com}}{r_1^2}$.

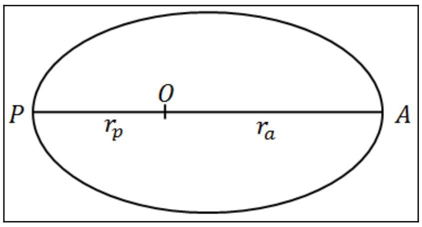
donc $v_1 = \sqrt{\dfrac{G m_{com}}{r_1}}$.

Numériquement, $v_1 = 15\, cm \cdot s^{-1}$.

14. $T_1 = \dfrac{2\pi r_1}{v_1} \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_1^3}{G m_{com}}}$.

Numériquement, $T_1 = 1{,}26.10^6 s \simeq 14{,}6\, j$.

15.



16. Sur une orbite circulaire de rayon R :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_{ros} v^2 - G\frac{m_{com} m_{ros}}{R} = \frac{1}{2} m_{ros}\frac{G m_{com}}{R} - G\frac{m_{com} m_{ros}}{R} = \frac{-G m_{com} m_{ros}}{2R}$$

Sur l'orbite elliptique on remplace R par le demi grand-axe a. L'énergie mécanique de la sonde est alors

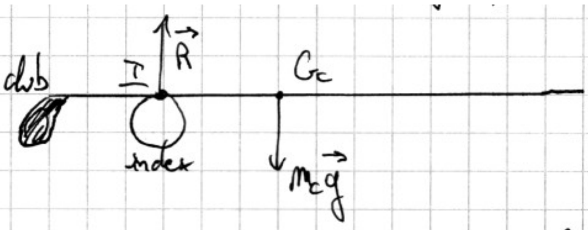
$$E_m = \frac{-G m_{com} m_{ros}}{2a} \Rightarrow E_m = \frac{-G m_{com} m_{ros}}{r_a + r_p} .$$

17. Au péricentre, $E_m = E_c + E_p \Rightarrow -\dfrac{G m_{com} m_{ros}}{r_a + r_p} = \dfrac{1}{2} m_{ros} v_p^2 - \dfrac{G m_{com} m_{ros}}{r_p} \Rightarrow v_p = \sqrt{2 G m_{com}\left(\dfrac{1}{r_p} - \dfrac{1}{r_a + r_p}\right)}$.

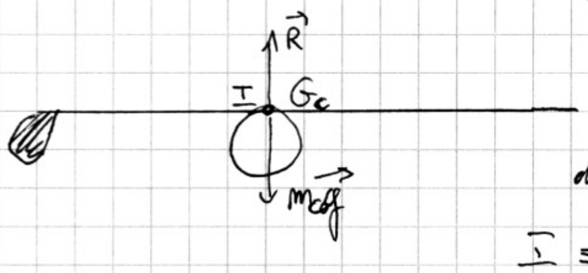
18. Sur l'orbite circulaire de rayon r_p , la vitesse de la sonde est $v'_p = \sqrt{\dfrac{G m_{com}}{r_p}} = 26\, cm \cdot s^{-1}$.

Les propulseurs doivent donc ralentir la sonde de $\Delta v = -4{,}0\, cm \cdot s^{-1}$ lorsque celle-ci est au péricentre de l'orbite elliptique

Problème 1 : Club de golf (Centrale)

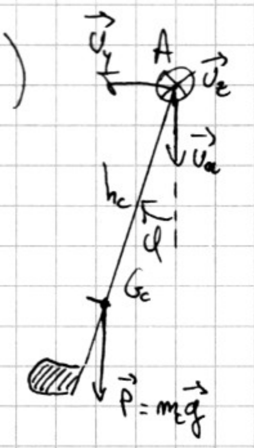
1) 

Le moment résultant en I des forces subies par le club n'est pas nul : il n'y a pas équilibre, le club tourne.



Si l'index se situe à l'endroit de G_c, le moment résultant en $I \equiv G_c$ est nul : il y a équilibre.

On peut ainsi chercher G_c à tâton.

2) 

Théorème scalaire du moment cinétique par rapport à (Az) :

$$J_c \ddot{\varphi} = \mathcal{M}_{poids} + \mathcal{M}_{pivot}$$

avec $$\mathcal{M}_{poids} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotation selon} \\ -\vec{u}_z}}{-} m_c g \underbrace{h_c \sin\varphi}_{\text{bras de levier}}$$

et $$\mathcal{M}_{pivot} = 0 \quad \text{(pas de frottement)}$$

donc $$\boxed{J_c \ddot{\varphi} + m_c g h_c \sin\varphi = 0}$$

3) Pour les petites oscillations : $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$

avec $$\omega_0^2 = \frac{m_c g h_c}{J_c} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

donc $$\boxed{J_c = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \cdot m_c g h_c}$$

AN : $J_c = 0{,}73$ kg·m²