CORRECTION TD19

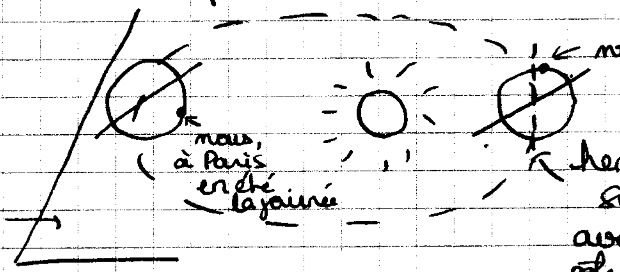
EXERCICE 1 Voir cours.

EXERCICE 2

Jean-Kevin raconte n'importe quoi... Certes la trajectoire de la Terre est elliptique (première loi de Kepler) mais cela n'a RIEN à voir avec les saisons...

Pour contredire Jean Kevin, on peut simplement remarquer que l'hiver de l'hemisphère nord se produit en même temps que l'été de l'hemisphère sud. D'ailleurs, la Terre est au plus proche du soleil le 4 janvier soit en hiver à Paris.

$\Rightarrow$ L'origine des saisons est liée à l'obliquité (inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport à l'ecliptique).



EXERCICE 3

1. $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \Rightarrow \boxed{M_S = \frac{4\pi^2}{GT^2}R^3}$

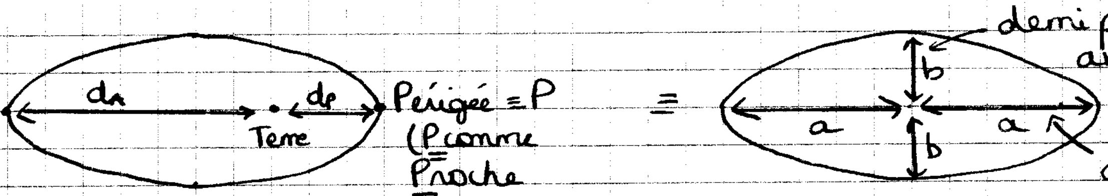
A.N. $M_S = \frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}\times(365,25\times24\times3600)^2} \times (150.10^6.10^3)^3 = \underline{2,0.10^{30}\ kg}$

2. $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow R^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \Rightarrow \boxed{R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$

A.N. $R = \left(\frac{6,67.10^{-11}\times 6,0.10^{24}\times(27,3\times24\times3600)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \Rightarrow \underline{R = 3,8.10^8\ m}$ (380 000 km)

EXERCICE 4

1.



On a $2a = d_A + d_P \Rightarrow \boxed{a = \frac{d_A + d_P}{2}}$

A.N. $a = \frac{359.10^3 + 200}{2} \Rightarrow \underline{a = 18,1.10^3\ km}$

2. Mouvement elliptique $E_m < 0$ et $E_m = -\dfrac{G m M_T}{2a}$
(état lié)

$$\Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{G m M_T}{d_A + d_P} < 0}$$

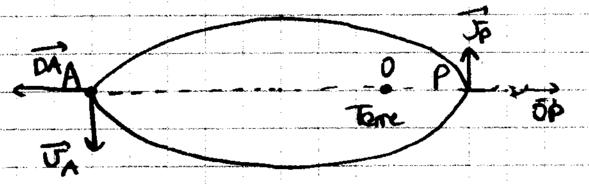
A.N. $E_m = -\dfrac{6{,}67.10^{-11} \times 1{,}1.10^3 \times 6{,}0.10^{24}}{(200 + 35{,}9.10^3).10^3}$ ⚠ $\Rightarrow \underline{E_m = -1{,}2.10^{10}\,J}$

3. $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow T = \left(\dfrac{4\pi^2 a^3}{GM_T}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2\left(\frac{d_A+d_P}{2}\right)^3}{GM_T}}}$

A.N. $T = \left(\dfrac{4\pi^2\left(\frac{(200+35{,}9.10^3).10^3}{2}\right)^3}{6{,}67.10^{-11} \times 6{,}0.10^{24}}\right)^{1/2} \Rightarrow T = 2{,}4.10^4\,s$

$\Rightarrow \underline{T = 6{,}7\,h}$ (= 6h et 42min~)

4. $\vec{L}_O(\text{apogée}) = \vec{L}_O(\text{périgée})$



$\vec{L}_O(\text{apogée}) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}_A\,\vec{e_z}$
$= m\,OA\,v_A\,\vec{e_z}$ (car $\vec{v}_A \perp \vec{OA}$)
$= m d_A v_A\,\vec{e_z}$

$\vec{L}_O(\text{périgée}) = m d_P v_P\,\vec{e_z}$ ($\hat{m}$ raisonnement)

$$\Rightarrow m d_A v_A = m d_P v_P$$

$$\Rightarrow \boxed{v_P = \frac{d_A v_A}{d_P}}$$

A.N. $v_P = \dfrac{35{,}9.10^3}{200}\,3{,}5.10^2$

$\Rightarrow \underline{v_P = 6{,}3.10^4\,m.s^{-1}}$

Rq. On trouve $v_P > v_A \rightarrow$ logique d'après la deuxième loi de Kepler.

EXERCICE 5

Système : {satellite} Réf : géo supposé galiléen, avec O fixe ds Rg.

en A_1^-, $\dfrac{1}{2} m v_0^2 - \dfrac{G m M}{r_0} = -\dfrac{G m M}{2 r_0}$ (car mvt circulaire)
↳ E_m de la forme $-\frac{1}{2}\frac{GmM}{R}$

$\Rightarrow v_0^2 = \dfrac{GM}{r_0}$ (on pouvait admettre ce résultat directement)

en A_1^+, $\dfrac{1}{2} m v_1'^2 - \dfrac{G m M}{r_0} = -G\dfrac{mM}{2a}$ (car mvt elliptique → E_m de la forme $-\frac{1}{2}\frac{GmM}{a}$

or ici, $2a = 3 r_0$ (voir schéma de l'exo)

donc $\dfrac{1}{2} m v_1'^2 - \dfrac{G m M}{r_0} = -G\dfrac{mM}{3 r_0}$

$$\Rightarrow v_1'^2 = \frac{4}{3}\frac{GM}{r_0} \quad \text{or } v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$$

$$\Rightarrow v_1'^2 = \frac{4}{3} v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_1' = \frac{2}{\sqrt{3}} v_0}$$

Pour v'_2, même méthode que pour v'_1 :

en A_2^- : $E_m = \frac{1}{2} m v_2'^2 - G\frac{mM}{2r_0}$ or $E_m(\text{ellipse}) = -\frac{GmM}{2a}$

donc

$$\frac{1}{2} m v_2'^2 - \frac{GmM}{2r_0} = -\frac{GmM}{2a} \quad \text{avec } 2a = 3r_0$$

soit $\frac{1}{2} m v_2'^2 = -\frac{GmM}{3r_0} + \frac{GmM}{2r_0} = \frac{GmM}{6r_0}$ et donc $v_2'^2 = \frac{GM}{3r_0}$

et donc $\boxed{v'_2 = \frac{v_0}{\sqrt{3}}}$

et enfin, mouvement circulaire $\Rightarrow v_{A_2^+}^2 = v_2^2 = \frac{GM}{(2r_0)} = \frac{1}{2} v_0$

$\Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}}$

EXERCICE 6 (extrait de concours)

V.A Question de cours. Système : {vaisseau} Réf : lié à l'astre de masse M
BDF : $\vec{F} = F(r)\vec{e_r}$ où $\vec{e_r} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}$ et $r = OP$ où P est la position de m à l'instant t.

alors d'après le TMC (car O fixe dans $\mathcal{R}$)

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{OP} \wedge \vec{F} = r\vec{e_r} \wedge F(r)\vec{e_r} = \vec{0}$$

donc $\boxed{\vec{L_0} = \vec{cste}}$

V.B Encore question de cours. ① $\vec{L_0} = \vec{cste} \Rightarrow$ le mouvement est plan $\Rightarrow$ plan $\perp$ à $\vec{L_0}$ passant par O.

② 2eme conséquence : loi des aires. $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = cste$ ← constante des aires.

en effet : $\vec{L_0} = \vec{OP} \wedge m\vec{v} = r\vec{e_r} \wedge m(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$ vitesse aréolaire

$$\Rightarrow \vec{L_0} = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z} = \vec{cste} \Rightarrow C = r^2\dot{\theta} = cste.$$

$\Rightarrow$ les aires balayées par le rayon vecteur $\vec{OP}$ sont égales pendant des durées égales.

V.C La force subie par le vaisseau en P est $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e_r}$

avec $\vec{e_r} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\| \leftarrow r}$ donc $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^3}\vec{OP}$

or $\vec{F} = m\vec{g}$ donc $\boxed{\vec{g}(P) = -\frac{GM}{r^3}\vec{OP}}$

V.D $\vec{F}$ est conservative $\Rightarrow \exists E_p$ tq $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$.

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot d\vec{OP} = F(r)\,dr = -\frac{GmM}{r^2}dr = -d\Big(\frac{GmM}{r} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{choisie } = 0 \\ \text{car } E_p = 0 \text{ qd } r \to \infty}}{cste}\Big)$$

$\Rightarrow \boxed{E_p = -\frac{GmM}{r}}$

V.E Encore une question de cours !

orbite circulaire $\Rightarrow$ $\vec{OP} = R\vec{e_r}$ $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = v\vec{e_\theta}$ $\vec{a} = -\frac{v^2}{R_0}\vec{e_r} + \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$

PFD :

$$\begin{cases} -\frac{v^2}{R_0}\times m = -\frac{GmM}{R_0^2} & (1) \\ \frac{dv}{dt}\times m = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow v = cste = v_0$$

et donc (1) $\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$

alors $E_m = \frac{1}{2}m v_0^2 - G\frac{mM}{R_0} = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R_0} - \frac{GmM}{R_0}$

$\Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{GmM}{2R_0}} < 0 \Rightarrow$ $\underline{E_m < 0 \Rightarrow \text{état lié}}$

$v_0 = \frac{\text{perimètre de l'orbite}}{T_{rev}} \Rightarrow T_{rev} = \frac{2\pi R_0}{\sqrt{\frac{GM}{R_0}}}$

$\Rightarrow \boxed{T_{rev} = \frac{2\pi R_0\sqrt{R_0}}{\sqrt{GM}}}$ (& retrouve avec la 3ème loi de Kepler)

II.F Système {masse} Rf : géocentrique BDF $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e_r}$

A l'état initial $E_m = \underset{\uparrow \text{ "initialement au repos"}}{0} + \left(-\frac{GmM_T}{R_T}\right) = -\frac{GmM_T}{R_T}$ (on néglige l'énergie cinétique due à la rotation de la Terre sur elle-même devant $-\frac{GmM_T}{R_T}$)

(ODG E_c : $\frac{1}{2}mR_T\left(\frac{2\pi}{T_{terre}}\right)^2 \simeq 10^2$ J ; ODG $E_p \simeq 10^8$ J) pour $m = 1$ kg.

à l'état "final" $E_m = -\frac{GmM_T}{2R_0}$

$\Rightarrow \Delta E_m = -\frac{GmM_T}{2R_0} + \frac{GmM_T}{R_T} = GmM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_0}\right)$

or $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta E_m = mg\left(R_T - \frac{R_T^2}{2R_0}\right)}$

A.N. $\Delta E_m = 1\times 10 \times 6400\times 10^3 \left(1 - \frac{6400}{2\times 7000}\right)$

$\Rightarrow$ $\underline{\Delta E_m = 3{,}5.10^7 \text{ J}}$

⚠ erreur à ne pas faire : même si $m = 1$ kg, ne SURTOUT pas remplacer m par 1 dans les expressions littérales

II.G. 1 kWh $= 1000$ W $\times 3600$ s $= 3{,}6.10^6$ J.

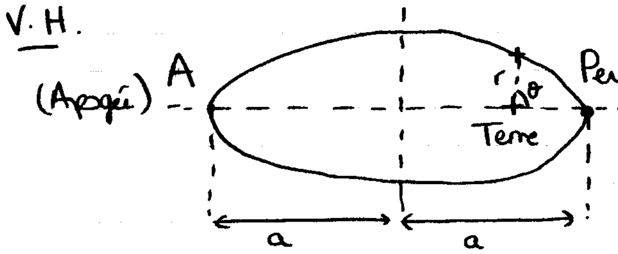
donc $\boxed{\text{Coût} = \frac{\Delta E_m}{E_0}\times 0{,}15}$ avec $E_0 = 3{,}6.10^6$ J.

A.N. Coût $= \frac{3{,}5.10^7}{3{,}6.10^6}\times 0{,}15 = 1{,}5$€ ! (pour 1 kg).

$\frac{1000\text{€}}{1{,}5\text{€}} = 667$ $\Rightarrow$ le coût est en réalité 667 fois plus important.

Il faut ajouter le prix de toutes les installations nécessaires au lancement, de la recherche et du lanceur, etc.

V.H.



$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta)}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = r(1+e\cos(\theta))$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$$

au périgée $\theta = 0 \Rightarrow r_p = \dfrac{p}{1+e}$

à l'apogée $\theta = +\pi \Rightarrow r_a = \dfrac{p}{1-e}$

or $2a = r_p + r_A \Rightarrow a = \dfrac{r_p + r_A}{2} = \dfrac{1}{2}p\left(\dfrac{1}{1+e} + \dfrac{1}{1-e}\right)$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}p\left(\dfrac{1-e+1+e}{1-e^2}\right)$ soit :

$$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$$

VI : 3ème loi de Kepler $\dfrac{T_{orb}^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$ soit $\boxed{T_{orb} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}}}$

VI A. C'est la vitesse de libération vue en cours : on doit avoir $E_m \geqslant 0$ avec

$E_m = \dfrac{1}{2}mV_1^2 - \dfrac{GMm}{R_0} = E_m(A_1^+)$ si l'on considère qu'en A1, le vaisseau est sur l'orbite de rayon R_0 et qu'on vient lui transmettre une vitesse V_1.

donc $\dfrac{1}{2}mV_1^2 - \dfrac{GMm}{R_0} \geqslant 0 \Rightarrow V_1^2 \geqslant \dfrac{2GM}{R_0}$

$\Rightarrow \boxed{V_1 \geqslant \sqrt{\dfrac{2GM}{R_0}}}$

VI. B 1. $V_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{R_0}} \Rightarrow 5V_0 = 5\sqrt{\dfrac{GM}{R_0}} > \sqrt{\dfrac{2GM}{R_0}} \Rightarrow$ le vaisseau part à l'infini.

Cherchons V_∞. Par conservation de l'Em après l'augmentation de vitesse :

$$\frac{1}{2}m(5V_0)^2 - G\frac{mM}{R_0} = \frac{1}{2}mV_\infty^2 - \underbrace{\frac{GmM}{R_\infty}}_{=0}$$

$\Rightarrow V_\infty^2 = (5V_0)^2 - \dfrac{2GM}{R_0} = (5V_0)^2 - 2V_0^2 \Rightarrow \boxed{V_\infty = \sqrt{23}\,V_0}$

VI.B.2. Déterminons a (demi grand axe de la nouvelle trajectoire) :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 - \frac{GmM}{R_0} = -\frac{GmM}{2a} \quad \text{or} \quad V_0^2 = \frac{GM}{R_0}$$

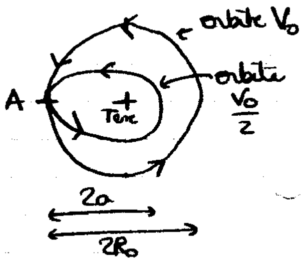
donc $\dfrac{1}{2}m \times \dfrac{1}{4}\dfrac{GM}{R_0} - \dfrac{GmM}{R_0} = -\dfrac{GmM}{2a}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{8R_0} - \dfrac{1}{R_0} = -\dfrac{1}{2a} \Rightarrow -\dfrac{7}{8R_0} = -\dfrac{1}{2a} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{4R_0}{7}} < R_0$

$\Rightarrow 2a < 2R_0$

Il n'y a qu'au périgée et à l'apogée que le rayon vecteur est $\perp$ à la vitesse

donc le point de départ est l'apogée : $\boxed{r_A = R_0}$ et $\boxed{V_A = \frac{V_0}{2}}$
(car V a diminué ⇒ $2a<2R_0$)



départ forcément de l'apogée pour avoir $2a<2R_0$ et $\vec{v}_A \perp \vec{OA}$

Par conservation du moment cinétique :

$$r_A V_A = r_P V_P \Rightarrow V_P = \frac{r_A V_A}{r_P}$$

or $r_A = R_0$, $V_A = \frac{V_0}{2}$ et $r_P = 2a - r_A = 2\frac{4R_0}{7} - R_0 = \frac{R_0}{7}$

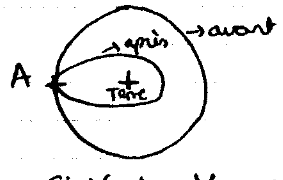
et donc

$$V_P = \frac{\cancel{R_0}\times\frac{V_0}{2}}{\frac{\cancel{R_0}}{7}} \Rightarrow \boxed{V_P = \frac{7}{2}V_0}$$

Rq : on trouve $V_P > V_A$ ⇒ cohérent d'après la 2ème loi de Kepler.

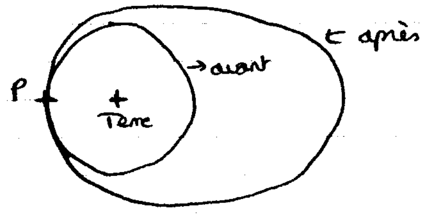
Rq : si on considère que le pt de départ est le périgée comme à l'exo 5, on aboutit à $r_P = R_0$, $V_P = \frac{V_0}{2}$, $V_A = \frac{7}{2}V_0$ ce qui est incohérent car on doit avoir $V_A < V_P$!

donc on a



si $V_{après} < V_{avant}$

et



si $V_{après} > V_{avant}$

⇒ C'était un peu logique !
↳ si on diminue V on a tendance à retomber vers la Terre !

→ Pour que l'option 2 soit bonne il faut forcément que

$\boxed{R_{astre} < r_p}$ (sinon le satellite s'écrase !)

VI B.3. On a utilisé $\frac{1}{8}4V_0$, il nous reste donc $\frac{7}{8}4V_0 = \frac{7}{2}V_0$ à utiliser.

Au périgée, on fait donc passer la vitesse de $\frac{7V_0}{2} = V_P$ à $\frac{7V_0}{2} + \frac{7V_0}{2} = 7V_0$.

Alors $E_m = \frac{1}{2}m(7V_0)^2 - \frac{GMm}{R_0/7} = \frac{1}{2}m\,49\times\frac{GM}{R_0} - \frac{7GmM}{R_0}$

$$\Rightarrow E_m = \frac{mMG}{R_0}\left(\frac{49}{2} - 7\right) \geq 0$$

⇒ la trajectoire est une branche d'hyperbole, et

$$\frac{1}{2}m(7V_0)^2 - \frac{GmM}{R_0/7} = \frac{1}{2}mV_\infty^2 - \underbrace{\frac{GmM}{R_\infty}}_{=0}$$

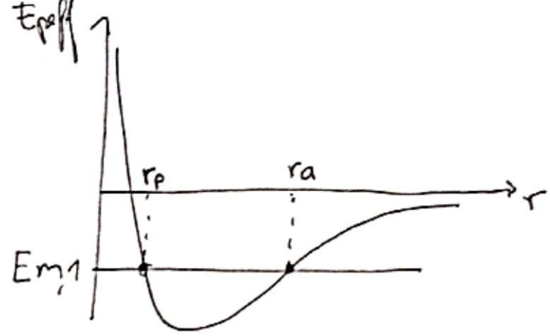
$$\Rightarrow V_\infty^2 = (7V_0)^2 - \frac{7}{R_0}\times 2\times GM = 49V_0^2 - 14V_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_\infty = \sqrt{35}\,V_0}$$

VI.B.4. V_∞ option 2 > V_∞ option 1 ce qui peut paraître paradoxal puisqu'on a utilisé une partie du budget pour... freiner !
⇒ il est plus efficace de produire une variation de vitesse près d'un astre que loin de lui.

Exercice 7

1) $$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_Tm}{r}}_{E_{peff}}$$



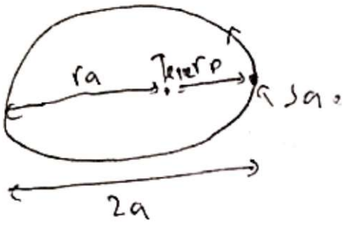
si $r=r_p$ $\underline{E_m = E_{peff}(r_p)}$ et $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$

de même si $r=r_a$ $\underline{E_{m1} = E_{peff}(r_a)}$ et $\frac{1}{2}m\dot{r}^2=0$

on en déduit
$$E_{m1} = \frac{L^2}{2mr_a^2} - \frac{GM_Tm}{r_a} \quad \text{et} \quad E_{m1} = \frac{L^2}{2mr_p^2} - \frac{GM_Tm}{r_p}$$

$\times r_a^2$ | $\times r_p^2$

$$r_a^2 E_{m1} = \frac{L^2}{2m} - GM_Tmr_a \quad \Bigg| \quad E_{m1}r_p^2 = \frac{L^2}{2m} - GM_Tmr_p$$



finalement $$r_a^2 + \frac{GM_Tm}{E_{m1}}r_a - \frac{L^2}{2mE_{m1}} = 0 \quad \Bigg| \quad r_p^2 + \frac{GM_Tm}{E_{m1}}r_p - \frac{L^2}{2E_{m1}m} = 0$$

$$\alpha = \frac{GM_Tm}{E_{m1}} \qquad \beta = \frac{-L^2}{2mE_{m1}}$$

2) ainsi $r_a = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$ et de même $r_p = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$

Comme $r_a > r_p$ on garde $r_a = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$ et $r_p = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$

on a lors $2a = r_a + r_p = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2} + \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}\right)$

soit $\underline{2a = -\alpha} \iff 2a = -\frac{GM_Tm}{E_{m1}}$

$$\boxed{E_{m1} = -\frac{GM_Tm}{2a}} < 0$$ logique car la trajectoire est bornée (état lié)

3) $$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = \left\| \frac{\vec{F_g}(r=R_T)}{m} \right\|$$

$$GM_T = g_0 \times R_T^2 \Rightarrow \boxed{E_{m1} = -\frac{mg_0R_T^2}{2a}}$$

Exercice 8

1) $Ep = -\frac{G \times M_T \times m}{R+h}$ $\quad Ec = \frac{1}{2} m v^2$ avec $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R+h}}$

$$Ec = \frac{1}{2} m \frac{GM_T}{R+h} = -\frac{Ep}{2} \Rightarrow \boxed{Ec = -\frac{Ep}{2}}$$ (Th du Viriel)

2) $\Delta Em = W_{1 tour}(\vec{f}_d) < 0$ car travail résistant

ΔEm (sur 1 tour) $= Em(h-\Delta h) - Em(h) = Ec(h-\Delta h) + Ep(h-\Delta h) - Ec(h) - Ep(h)$

or $Ep(h) = -2Ec(h)$ et $Ep(h-\Delta h) = -2Ec(h-\Delta h)$

donc $\Delta Em = Ec(h-\Delta h) - 2Ec(h-\Delta h) - Ec(h) - (-2Ec(h)) = -(Ec(h-\Delta h) - Ec(h))$

$\underline{\Delta Em = -\Delta Ec}$ $\quad$ comme $\Delta Em < 0 \Rightarrow \boxed{\Delta Ec > 0}$ donc l'énergie cinétique augmente donc la vitesse aussi !

3) On voit v comme une fonction de h $v(h) = \sqrt{\frac{GM_T}{R+h}} = \sqrt{GM_T}\,(R+h)^{-1/2}$

on dérive v par rapport à h $\frac{dv}{dh} = -\frac{1}{2}\sqrt{GM_T}\,(R+h)^{-3/2}$

$\hookrightarrow dv = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{GM_T}}{(R+h)^{3/2}} \times dh$ or $v = \frac{\sqrt{GM_T}}{\sqrt{R+h}}$

$$dv = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{GM_T} \times (R+h)^{1/2}}{(R+h)^{3/2} \times (R+h)^{1/2}} dh \Leftrightarrow dv \overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{GM_T}}{(R+h)^{4/2}}\frac{\sqrt{GM_T}}{v} dh \quad \underbrace{\Leftrightarrow (R+h)^{1/2} = \frac{\sqrt{GM_T}}{v}}_{(1)}$$

$$dv = -\frac{1}{2}\frac{GM_T}{(R+h)^2 \times v} dh$$

$$\text{donc } \boxed{\Delta v = -\frac{1}{2}\frac{GM_T\,\Delta h}{(R+h)^2 \times v}}$$

or si h = cste $v = \frac{2\pi(R+h)}{T}$

donc $\frac{\sqrt{GM_T}}{\sqrt{R+h}} = \frac{2\pi(R+h)}{T} \Rightarrow \frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow (R+h)^3 = \frac{GM_T\,T^2}{4\pi^2}$

$v = \frac{\sqrt{GM_T}}{\sqrt{R+h}} \Rightarrow (R+h)^2 v = (R+h)^{3/2} \times \sqrt{GM_T} = \left(\frac{GM_T\,T^2}{4\pi^2}\right)^{1/2} \times \sqrt{GM_T}$

$$\boxed{(R+h)^2 v = \frac{GM_T \times T}{2\pi}} \Rightarrow \Delta v = -\frac{1}{2}\frac{GM_T\,\Delta h}{\frac{GM_T \times T}{2\pi}}$$

finalement $\boxed{\Delta v = -\frac{1}{2} \times \frac{2\pi \Delta h}{T}}$

4) $W(\vec{f_d}) = \int_{1 \text{ tour}} \vec{f_d} \cdot \vec{dl}$. si on suppose que $v \simeq$ cste sur un tour et h aussi

car résistante

$$\boxed{W(\vec{f_d}) \simeq -\underbrace{\alpha \frac{mv^2}{h}}_{\|\vec{f_d}\|} \times \underbrace{2\pi(R+h)}_{\text{périmètre du tour}}}$$

or $E_m = -\frac{GmM_T}{2(R+h)} \Rightarrow \frac{dE_m}{dh} = \frac{GmM_T}{2(R+h)^2} \Rightarrow dE_m = \frac{GmM_T}{2(R+h)^2} dh$

donc sur un tour $\Delta E_m = \frac{GmM_T}{2(R+h)^2} \Delta h$

et d'après le TEM: $\Delta E_m = W(\vec{f_d}) \Leftrightarrow \frac{GmM_T}{2(R+h)^2} \Delta h = -\frac{\alpha m v^2}{h} \times 2\pi(R+h)$

or $v = \frac{\sqrt{GM_T}}{\sqrt{R+h}} \Rightarrow \frac{\cancel{G}m\cancel{M_T}}{2(R+h)^2} \Delta h = -\frac{\alpha m \cancel{GM_T}}{h\cancel{(R+h)}} \times 2\pi\cancel{(R+h)}$

$$\boxed{\alpha = -\frac{h \Delta h}{4\pi(R+h)^2}}$$

A.N $\alpha = 10^{6}$

$W(\vec{f_d}) = -73 \text{ kJ}$

Exercice 9

1) on sait que $\frac{T^2}{a^3} = cste = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ (autour du soleil de masse M_S)

$\frac{T^2}{a^3} = cste = \frac{4\pi^2}{GM_J}$ (autour de Jupiter de masse M_J)

$\frac{T_{titan}^2}{a_{titan}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}$ et $\frac{T_{terre}^2}{a_{terre}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ (on aurait pu choisir une autre planète que la Terre)

$$\boxed{\frac{\frac{T_{titan}^2}{a_{titan}^3}}{\frac{T_{terre}^2}{a_{terre}^3}} = \frac{M_S}{M_J}}$$

A.N $M_J = M_S \times$

2) $\frac{T_{venus}^2}{a_{venus}^3} = \frac{T_{terre}^2}{a_{terre}^3} \Rightarrow \boxed{T_{venus} = \left(\frac{a_{venus}}{a_{terre}}\right)^{3/2} \times T_{terre}}$

$= \left(\frac{0,76}{1}\right)^{3/2} \times 1,00$ an

3) $\frac{T_{Halley}^2}{a_{Halley}^3} = \frac{T_{terre}^2}{a_{terre}^3} \Rightarrow a_{Halley} = \left(\frac{T_{halley}^2}{T_{terre}^2}\right)^{1/3} a_{terre}$

$$\boxed{a_{Halley} = (76)^{1/3} \times a_{terre}}$$

Scanné avec CamScanner