# Programme de colles n° 23

Semaine du 31/03/2025 au 04/04/2025

☞ ***Analyse asymptotique, espaces vectoriels*** ☜

---

**Format de la colle :**

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

---

## — Chapitre 19 — Comparaisons asymptotiques —

Tout le chapitre.



## — Chapitre 20 — Espaces vectoriels —

Le début jusqu'aux propriétés du Vect. La définition d'une application linéaire a été donnée en vue de reconnaître des noyaux ou des images pour justifier que des ensembles sont des s.e.v.



### Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 19. Quatre équivalents ou limites piochés parmi ceux des exercices 6, 7 et 10.
- Chapitre 20. Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels respectivement de $E$ et $F$.
- Chapitre 20. Si $u_1, \ldots, u_p$ sont des vecteurs de $E$, alors $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

# Automatismes de calcul

*On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.*
*Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.*

- **Logique, raisonnement**
  *Exemples : montrer que* $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ *pour tous* $x,y \in \mathbb{R}$, *savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est* $2\pi$*-périodique et savoir nier ces assertions.*

- **Trigonométrie.**
  *Exemples : formule* $\cos(2a)$, *résolution de* $\sin a = \sin b$, $\cos(2x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**
  *Exemples : résoudre* $x\,|x| \leqslant 3x+2$, *montrer que* $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x|$ *pour tous* $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, *encadrer rapidement* $x \longmapsto \dfrac{\cos x + 2}{x^2+4}$ *sur* $[\,0\,;1\,]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, $n$-ièmes).
  *Exemples : calculer la forme exponentielle de* $\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$, *les racines carrées de* $3 - 4\mathrm{i}$, *linéarisation de* $\cos^3 x$, *résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  *Exemples : donner la formule pour* $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$, *calculer* $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} 2^k$, *écrire* $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ *avec des factorielles.*

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  *Exemples : définir* $\operatorname{Arctan}$, *simplifier* $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$, *théorème de dérivation de* $g \circ f$, *dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$, *donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$, *de* $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$, *de* $x \longmapsto \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$, *ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de* $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**
  *Exemples :* $\displaystyle\int^x \cos t\, \mathrm{e}^{2t}\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$.

- **Équations différentielles.**
  *Exemple : résoudre* $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  *Exemples : expression de la suite vérifiant* $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$, *expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**
  *Exemples :* $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\lim \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, *adjacence des suites définies par* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ *et* $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$, *savoir démontrer que* $n!/n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- **Matrices.**
  *Exemples : puissances de* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *calcul de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.
  *Exemples : dérivée* $n$*-ième de* $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$, $|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leqslant |x-y|$ *pour tous* $x,y$, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ *pour tout* $x > 0$.