Lycée Jean Perrin

Filière PCSI

Samedi 29 mars 2025

# DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE N°6

## Hydrostatique. Mécanique du solide, mouvement à force centrale

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous semblent pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

# PROBLÈME1 – Le pas pendulaire

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour permettre le déplacement.
On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillations d'une jambe d'adulte en utilisant un modèle mécanique simple.
On assimile la jambe à un solide indéformable de masse $m_0$ et de longueur L en rotation autour d'un axe horizontale $(O,\vec{e}_x)$ fixe dans le référentiel d'étude.
$(O,\vec{e}_x)$ passe par la hanche du randonneur ( il est sortant sur la figure 1. La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(O,\vec{e}_x)$ est noté J. On néglige tout frottement
On note H le centre d'inertie de la jambe situé à une distance **d'** de O.
La jambe ne touche pas le sol dans cette étude.
$\theta$ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH)
L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g}=-g\vec{e}_z$

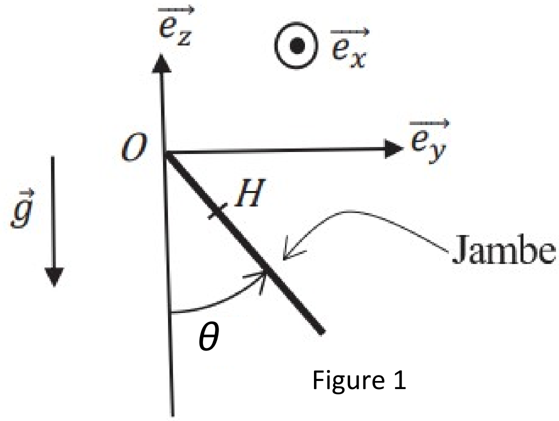


Figure 1

**Q**1 Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire $L_{OX}$ de la jambe par rapport à l'axe $(O,\vec{e}_x)$ en fonction notamment de $\dot{\theta}$

**Q2** Que vaut le moment par rapport à $(O,\vec{e}_x)$ de l'action mécanique de la liaison en O ? Justifier.
**Q3** Déterminer l'expression du moment $\Gamma_{OX}$ du poids de la Jambe par rapport à $(O,\vec{e}_x)$
**Q4** Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta$

**Q5** Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe

L'énergie potentielle de la jambe s'écrit $E_p = - m_0\, g\, d' \cos(\theta)$+constante

**Q6** Montrer que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement en utilisant la réponse à la Q4

**Q7** En se plaçant dans l'approximation des petits angles, montrer que la période propre T d'oscillation de la jambe est

$$T=\frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_0 g d'}}$$

Le moment d'inertie est de la forme J = k $m_0$ $L^2$ Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe.
**Q8** En déduire que la période propre T de la jambe est indépendant de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur L de la jambe

**Q9** Un randonneur adulte a une jambe d'environ +90 cm. La période propre d'oscillation de sa jambe est de 1,6 s
Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure 40 cm ?

**Q10** À l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse linéaire du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillation naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe.
Montrer alors que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

# PROBLÈME 2 – Terraformer l'atmosphère de Mars

Il y a quatre milliards d'années, Mars avait un environnement identique à celui de la Terre : une atmosphère dense était présente et permettait de conserver chaleur et humidité, ce qui participait à rendre cette planète habitable. Aujourd'hui, Mars n'a quasiment plus d'atmosphère. Elle est devenue une planète froide et désertique. Son atmosphère actuelle est principalement composée (en pourcentages massiques) de dioxyde de carbone (96 %), d'argon (environ 2 %) et de diazote (2 %). Elle comporte également des traces de dioxygène, d'eau et de méthane. La pression moyenne ambiante est environ 170 fois moins importante que sur Terre. À une altitude de référence, au niveau du sol martien, la pression moyenne et la température moyenne sont respectivement de 600 Pa et 210 K. La masse totale de l'atmosphère martienne est estimée à 25 teratonnes (25 000 milliards de tonnes), soit environ 200 fois moins que l'atmosphère terrestre.

Données utiles

Caractéristiques de la planète Mars :

| | | |
|---|---|---|
| Rayon moyen de l'orbite martienne autour du Soleil | $r_m$ | $2{,}28 \times 10^8$ km |
| Rayon moyen de la planète Mars | $R_m$ | $3{,}39 \times 10^3$ km |
| Masse de la planète Mars | $m_m$ | $6{,}42 \times 10^{23}$ kg |
| Température à la surface de Mars | $T_0$ | 210 K |
| Pression à la surface de Mars | $P_0$ | 600 Pa |
| Altitude moyenne de l'exobase (hors tempêtes de poussière) | $e$ | $2{,}20 \times 10^2$ km |

Caractéristiques du Soleil :

| | | |
|---|---|---|
| Rayon moyen du Soleil | $R_s$ | $6{,}96 \times 10^5$ km |
| Masse du Soleil | $m_s$ | $1{,}99 \times 10^{30}$ kg |
| Température de surface du Soleil | $T_s$ | 5778 K |

Ceinture d'astéroïdes :

| | | |
|---|---|---|
| Rayon moyen de la ceinture d'astéroïdes | $r_{ast}$ | $4{,}6 \times 10^8$ km |

Autres données utiles :

| | | |
|---|---|---|
| Constante de gravitation universelle | $G$ | $6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3$·kg$^{-1}$·s$^{-2}$ |
| Constante des gaz parfaits | $R$ | $8{,}314$ J·K$^{-1}$·mol$^{-1}$ |
| Constante d'Avogadro | $\mathcal{N}_a$ | $6{,}02 \times 10^{23}$ mol$^{-1}$ |
| Masse molaire du carbone | $M_C$ | 12 g·mol$^{-1}$ |
| Masse molaire de l'oxygène | $M_O$ | 16 g·mol$^{-1}$ |
| Masse molaire de l'argon | $M_{Ar}$ | 40 g·mol$^{-1}$ |
| Masse molaire de l'azote | $M_N$ | 14 g·mol$^{-1}$ |

## ***Champ de pesanteur***

On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution du champ de pesanteur martien avec l'altitude. Pour cela, on l'assimile au champ gravitationnel, tel qu'un objet de masse m placée en M dans un champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ subit la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}_{grav}(M)=m\vec{g}(M)$

**Q 1.** En identifiant $\vec{F}_{grav}(M)=m\vec{g}(M)$ à la force d'interaction gravitationnelle entre deux objets de masse m et $m_m$ (Masse de Mars) espacés de r , déterminer, dans l'espace autour de Mars, une expression de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}(r)$ de cette planète en fonction de r, $m_m$ et G. Avec r=OM où O est le centre de Mars.

**Q2** Obtenir une expression de $\vec{g}_0=\vec{g}(r=R_m)$ , accélération de la pesanteur au niveau du sol de Mars . Déterminer et calculer l'intensité $g_0$ de cette dernière

***Atmosphère Martienne***

On suppose l'accélération de la pesanteur $\vec{g}(M)$ radiale et d'intensité uniforme : $\|\vec{g}(M)\|=g_0$

On néglige tout mouvement au sein de l'atmosphère martienne. On l'assimile à un gaz parfait de particules de masse molaire $M$a .

On note respectivement $P(M)$ la pression et $\mu$(M) la masse volumique au point $M$.

La température de l'atmosphère, supposée uniforme, est notée $T_0$. La pression au sol est notée $P_0$

**Q3** Rappeler l'expression de l'équivalent volumique des forces de pression dans un fluide, puis établir l'équation locale de la statique des fluides. ( loi de la statique des fluides ). On choisira un axe vertical vers le haut.

**Q4** Montrer que la loi de variation de la pression se met sous la forme $P(z) = C_0 \exp(-z / H)$ dans l'atmosphère martienne (z =0 à la surface de Mars ).

Exprimer le facteur $C_0$ et la hauteur d'échelle $H$ en fonction de $P_0$ , $M_a$, $g_0$ , $R$ et $T_0$ .

**Q5 C**ompte tenu de la composition de l'atmosphère martienne fournie dans l'introduction de cette partie, on peut supposer que $M_a = 43{,}6$ g/mol . calculer $H$.

***Déduction de la masse de l'atmosphère martienne***

**Q6.** Expliciter grâce au modèle précédent $\mu(z)$ en fonction de z, R et H et $\mu_0 = \mu(z=0)$. On précisera l'expression de $\mu_0$ en fonction de $P_0$ , $M_a$ , $R$ et $T_0$ . (on pourra utiliser l'équation des gaz parfaits comme à Q4 )

***Transfert de masse depuis la ceinture d'Astéroïdes***

Pour constituer une atmosphère martienne suffisante, on imagine récupérer la masse nécessaire depuis la ceinture d'astéroïdes. Il s'agit d'une région du Système solaire, distante (en moyenne) de $R_{ast}$ du Soleil, située entre les orbites de Mars et de Jupiter. Elle contient des astéroïdes dont la taille varie du grain de poussière au planétoïde de quelques centaines de kilomètres de diamètre. Sa masse totale est estimée à $3 \times 10^{21}$ kg.

On veut déterminer la masse d'astéroïdes nécessaire à la constitution d'une atmosphère suffisante

Pour des questions d'habitabilité de la planète, on souhaite se limiter à une pression maximale de 1 bar.

**Q 7** En se plaçant dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à l'équilibre, déterminer la masse volumique de l'atmosphère au niveau du sol $\mu'_0$ pour que la pression y soit de 1 bar.

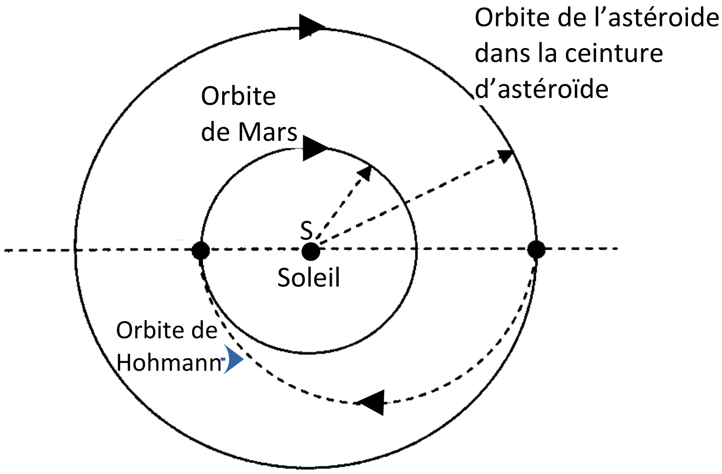
**Q8 On suppose pour cette question que la masse volumique vaut partout $\mu'_0$ dans l'atmosphère .**
**On suppose que l'atmosphère s'arrête en z=H.**

Sachant que le volume d'une coque sphérique de rayon interne $R_m$ et d'épaisseur H vaut $V= 4\,\pi\, R_m^{\,2}\, H$, calculer la masse totale de l'atmosphère $m'_{atm}$ correspondant à cette valeur limite de pression.

**Q9 S**achant que la masse de l'atmosphère de Mars est initialement de 25 teratonnes (25 000 milliards de tonnes), estimer la masse d'astéroïdes, notée $m_{ast}$, à déplacer depuis la ceinture d'astéroïdes dans le but de former une atmosphère de masse $m'_{atm}$

***À propos du transfert d'un astéroïde***

On envisage d'amener un astéroïde de la ceinture depuis son orbite circulaire de rayon $r_{ast}$ jusqu'à l'orbite martienne, ces deux orbites étant coplanaires. On considère pour la suite l'astéroïde Patientia, de masse $m_p = 1 \times 10^{19}$ kg, que l'on assimilera à un point matériel $M$.
On imagine le faire passer par une demi-ellipse de transfert, dite de Hohmann, dont le périhélie $P$ (point au plus près du Soleil) se trouve sur l'orbite martienne et l'aphélie $A$ (point le plus éloigné) sur la ceinture d'astéroïdes.




**Q 10.** Reproduire le schéma légendé en précisant les orbites et la demi-ellipse de transfert en jeu. Les points $A$ et $P$ seront indiqués, les rayons des orbites $r_m$ et $r_{ast}$ et le grand axe $2a$.

Q **11 Rappeler et justifier les deux lois de conservation** usuelles dans le cadre de l'étude mécanique d'un point matériel en mouvement dans un champ de force centrale conservatif. (Quelles grandeurs sont conservées ? )

**Q 12** Déterminer une expression de l'énergie mécanique $E_{m1}$ que possède l'astéroïde Patientia, relativement au référentiel héliocentrique d'étude galiléen, lorsqu'il est en orbite **circulaire** au niveau de la ceinture. On donnera l'expression en fonction de $G$, $m_p$ et $m_s$ et $r_{ast}$ seulement.

On s'intéresse à présent à la trajectoire de Hohmann. Il s'agit ici de trouver une expression de l'énergie mécanique $E_m$ de l'astéroïde Patientia en mouvement sur la demi-ellipse correspondante.

Le point $M$ sur cette trajectoire est repéré par ses coordonnées polaires d'origine au centre $S$ du Soleil.

**Q13** Expliciter le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point $M$ et son vecteur moment cinétique $\vec{L}$ par rapport au centre $S$ en coordonnées polaires.

**Q 14.** Mettre $E_m$ sous la forme $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{eff}(r)$ et donner l'expression de $E_{eff}(r)$ notamment en fonction de $L = \|\vec{L}\|$

**Q 15** Rappeler l'expression de l'énergie mécanique $E_m$ de l'astéroïde Patientia sur la trajectoire de Hohmann en fonction de son demi-grand axe $a$, ainsi que de $G$, $m_p$ et $m_s$ . On pourra raisonner par analogie avec le réponse à la question Q12 , $a$ jouant le rôle de $r_{ast}$

Le passage de l'astéroïde de l'orbite de la ceinture à la trajectoire de Hohmann s'effectue en lui appliquant une brusque variation $\Delta v$ de la valeur de sa vitesse.

**Q 16** Indiquer si ce passage correspond à une diminution ou à une augmentation de l'énergie mécanique de l'astéroïde.

**Q 17.** Exprimer $\Delta v$ en fonction des différentes données de l'énoncé. En faire une application numérique.

# PROBLÈME 3 – Le duel de l'aquarium

Dans ce duel, les opposants A et B ajoutent **chacun à leur tour une pièce dans un verre**, initialement vide, flottant dans un aquarium. **Le premier à faire couler le verre a perdu .**

Figure 5

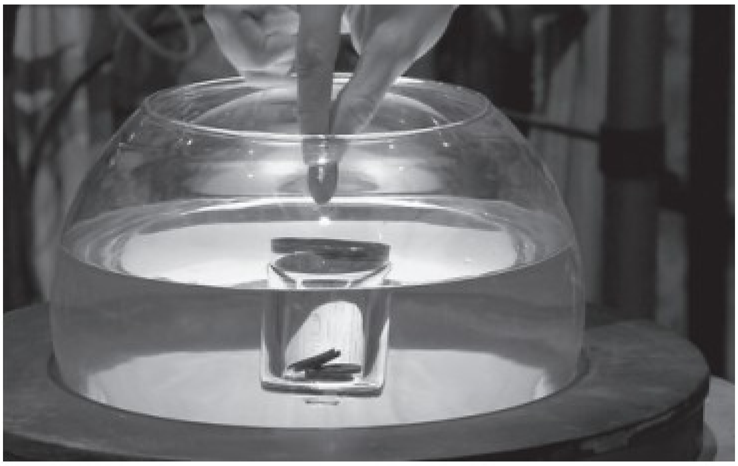
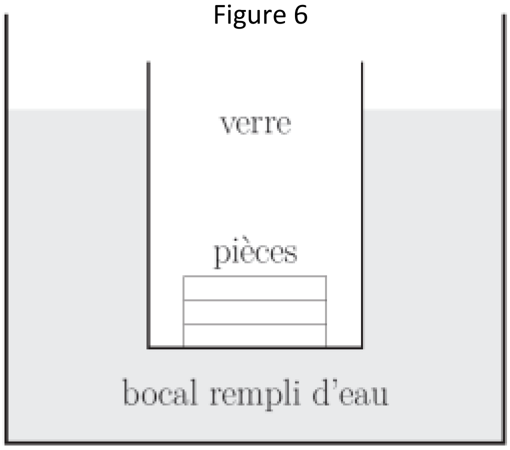


Figure 6




**On suppose que :**

- le bocal est suffisamment profond pour que le verre puisse couler intégralement ;
- le verre reste au centre du bocal et ne touche jamais les bords ;
- le verre, de masse $M$, est cylindrique de hauteur $h$ *et* de base circulaire d'aire $S$ ;
- le fond du verre reste toujours horizontal (il ne peut pas s'incliner comme sur la **figure 5**) ;
- les pièces ont une masse $m$ et sont toutes horizontales, empilées les unes sur les autres au fond du verre, bien alignées (pas comme sur la **figure 5**).

Le système ainsi modélisé est représenté **figure 6** (avec $n = 3$ pièces).

**Données numériques :**

- masse du verre : $M = 125$ g ;
- surface de la base du verre : $S = 2{,}0\cdot10^{-3}$ m$^2$ ;
- hauteur du verre : $h = 10$ cm ;
- masse d'une pièce : $m = 10$ g ;
- épaisseur d'une pièce : $e = 2{,}0$ mm ;
- masse volumique de l'eau : $\mu = 1{,}0\cdot10^3$ kg·m$^{-3}$.

Dans une question de type " résolution de problème ", un raisonnement détaillé et rigoureux est attendu. Tout élément de raisonnement correct, même partiel, sera récompensé.

**Question : Si la personne A commence est-elle certaine de gagner ou de perdre ?**