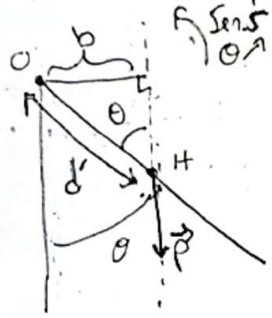
Correction DS 06

Problème 1

Q1) $\boxed{L_{Ox} = J\dot{\theta}}$

Q2) La liaison est parfaite donc $\underline{\mathcal{M}_{Ox}(\text{action de liaison}) = 0}$

Q3)



$\Gamma_{Ox} = -b \times \|\vec{P}\| = \boxed{-d'\sin\theta\, m_0 g}$

le poids fait tourner la jambe dans le sens θ décroissant

Q4) Système : {jambe}

bilan des moments : Γ_{Ox}

Théorème du moment cinétique par rapport à Ox :

$$\frac{d}{dt}(L_{Ox}) = \Gamma_{Ox} \iff \frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = -d'\sin\theta\, m_0 g$$

$$\iff J\ddot{\theta} = -d'\sin\theta\, m_0 g$$

$$\iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{d' m_0 g}{J}\sin\theta = 0}$$

Q5) $\boxed{E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}$

Q6) $\ddot{\theta} + \frac{d' m_0 g}{J}\sin\theta = 0 \quad \times\dot{\theta}$

$$\underbrace{\ddot{\theta}\dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)} + \frac{d' m_0 g}{J}\underbrace{\sin\theta\,\dot{\theta}}_{-\frac{d}{dt}(\cos\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{d' m_0 g}{J}\cos\theta\right) = 0$$

$\times J$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - d' m_0 g\cos\theta\right) = 0 \overset{\text{Primitive}}{\Rightarrow} \boxed{\overbrace{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - m_0 g d'\cos\theta + cste}^{E_m = E_c + E_{pp} = cste \text{ donc une intégrale 1ère}} = cste}$$

Q7 $\sin\theta \simeq \theta$ (petits angles)

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{m_0 g d'}{J}\theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ ← équat° diff d'un oscillateur harmonique

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_0 g d'}{J}}$

pulsation propre

la période propre est $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_0 g d'}}}$

Q8 $d' = \frac{L}{2}$ (Centre d'inertie au milieu de la jambe)

$J = K m_0 L^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{J}{m_0 g d'}} = \sqrt{\frac{K \cancel{m_0} L^2}{\cancel{m_0} g \frac{L}{2}}} = \sqrt{\frac{2KL}{g}}$

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2KL}{g}}}$ bien indépendant de m_0 et proportionnelle à $\sqrt{L}$

Q9) $T_{adulte} = \alpha \times \sqrt{L_{adulte}}$ (proportionnelle à $\sqrt{L_{adulte}}$)

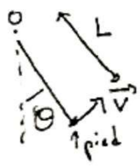
$T_{enfant} = \alpha \times \sqrt{L_{enfant}}$ (prop à $\sqrt{L_{enfant}}$)

$\Rightarrow \frac{T_{adulte}}{T_{enfant}} = \frac{\alpha \times \sqrt{L_{adulte}}}{\alpha \times \sqrt{L_{enfant}}} = \sqrt{\frac{L_{adulte}}{L_{enfant}}}$

$\boxed{T_{enfant} = T_{adulte}\sqrt{\frac{L_{enfant}}{L_{adulte}}}} \Rightarrow \underbrace{T_{adulte}}_{1,6}\sqrt{\frac{40}{90}}$

A.N $\boxed{T_{enfant} = 1,07\ s}$

Q10) la vitesse du randonneur est égale à la vitesse du pied (bout de la jambe) (hypothèse)



On a alors : $\underline{V = L\dot{\theta}}$ avec $\dot{\theta} = \omega_0$ $\Rightarrow \boxed{V = L\omega_0}$

$$V = \frac{L 2\pi}{T}$$

$$V = \frac{L \times 2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{2kL}{g}}} = \boxed{\sqrt{L} \times \sqrt{\frac{g}{2k}}}$$ bien proportionnelle à L !

$$\frac{V_{enfant}}{V_{adulte}} = \frac{\sqrt{L_{enfant}}}{\sqrt{L_{adulte}}} \Rightarrow V_{enfant} = \sqrt{\frac{40}{90}} \times V_{adulte}$$

$$V_{adulte} = \underbrace{\sqrt{\frac{90}{40}}}_{1,5\,!} V_{enfant}$$

Problème 2

Q1) $\vec{F}_{grav} = -\frac{\cancel{m} m_m G}{r^2}\vec{e_r} = \cancel{m}\vec{g}(r) \Rightarrow \boxed{\vec{g}(r) = -\frac{m_m G}{r^2}\vec{e_r}}$

Q2) $\vec{g_0} = \frac{-m_m G}{R_m^2}\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{g_0 = \frac{m_m G}{R_m^2}}$ A.N $g_0 = \frac{6,42\times 10^{23} \times 6,67\times 10^{-11}}{(3,39\times 10^{3} \times 10^{3})^2}$

à ne pas oublier ($1 km = 10^3 m$)

$$\boxed{g_0 = 3,7\ m/s^2}$$

Q3) $\vec{f_P} = -\overrightarrow{grad}\,P = -\frac{dP}{dx}\vec{e_x} - \frac{dP}{dy}\vec{e_y} - \frac{dP}{dz}\vec{e_z}$

système : particule de fluide de volume dV

bilan des forces volumiques : $\vec{f_P}$ et $\vec{f_G} = \frac{\vec{Poids}}{dV} = \frac{\mu\, dV \vec{g_0}}{dV} = \mu\vec{g_0}$

⚠ Ne pas confondre le poids et la pression
$\vec{P} = m\vec{g}$ vecteur
$P \in$ nombre

force gravitationnelle volumique

à l'équilibre les forces volumiques se compensent :

$\vec{f_P} + \vec{f_G} = \vec{0} \Rightarrow$ projection sur $\vec{e_z}$ $-\frac{dP}{dz} + \mu\underbrace{\vec{g_0}}_{\vec{g_0} = -g_0\vec{e_z}}\cdot\vec{e_z} = 0$

$$-\frac{dP}{dz} - \mu g_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dz} = -\mu g_0}$$

Q4) Loi des g.p

$PV = nRT_0 \Leftrightarrow PV = \frac{m}{M_a}RT_0 \Leftrightarrow \frac{PM_a}{RT_0} = \frac{m}{V} = \mu(M)$

$n = \frac{m}{M}$

Or $\frac{dP}{dz} = -\mu g_0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{dP}{dz} = -\frac{PM_a g_0}{RT_0}} \Rightarrow P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$

$P(z=0) = P_0$

avec $\boxed{H = \frac{RT_0}{M_a g_0}}$

Q5) A.N $\boxed{H = 10{,}8\,10^3\ m}$

⚠ $M_a = 43{,}6 \times 10^{-3}$ Kg/mol

unité SI

Q6) $\boxed{\mu_0 = \frac{P_0 M_a}{RT_0}}$ et $\mu(z) = \frac{P(z) M_a}{RT_0} \Rightarrow \boxed{\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{z}{H}}}$

Q7) $\mu_0' \simeq \frac{P_{atm} \times M_a}{RT_0}$ avec $P_{atm} = 10^5$ Pa

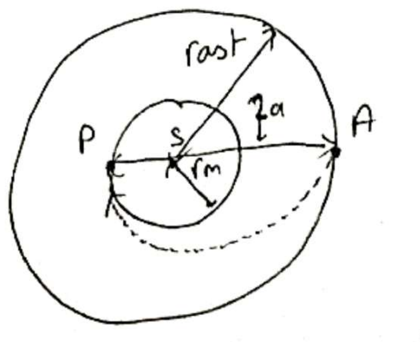
A.N $\mu_0' \simeq 2{,}5$ Kg/m³

Q8) $\mu_0' = \frac{\overset{10^5 Pa}{P_{atm}} \times M_a}{RT_0}$

$m'_{atm} = \mu_0' V_{atm} = 3{,}9 \times 10^{18}$ Kg

Q9) $m_{ast} = m'_{atm} - m_{atm} \simeq 3{,}87 \times 10^{18}$ Kg c'est énorme !

Q10)



Q11) Le système ne subit pas de forces non conservatives donc $Em = cste$ (TEM)

Le moment par rapport à S de la force centrale est nul ($\vec{F_g} \parallel \vec{SM}$) donc le moment cinétique se conserve

(TMC) : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathcal{M}_S(\vec{F_g}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \vec{cste}$

Q12) Le PFD appliqué à l'astéroïde en mouvement circulaire ds le réf héliocentrique donne :

$$-\frac{m_p v^2}{r_{ast}}\vec{e_r} = -\frac{m_p m_s G}{r_{ast}^2}\vec{e_r} \xRightarrow{\text{Projecto sur } \vec{e_r}} \boxed{v = \sqrt{\frac{G m_s}{r_{ast}}}}$$

$$E_{m_1} = \frac{1}{2}m_p v^2 - \frac{G m_s m_p}{r_{ast}} = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{G m_s m_p}{r_{ast}}}$$

Q13) $\vec{SM} = r\vec{e_r} \underset{\vec{v} = \frac{d\vec{SM}}{dt}}{\Rightarrow} \boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} m\dot{r} \\ mr\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z}} = \boxed{mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}}$$

Q14)

$$E_m = \frac{1}{2}m_p\vec{v}\cdot\vec{v} - \frac{G m_p m_s}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{G m_p m_s}{r}$$

or $L = \|L\| = m_p r^2\dot{\theta} \Rightarrow (r\dot{\theta})^2 = r^2\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m_p^2 r^2}$

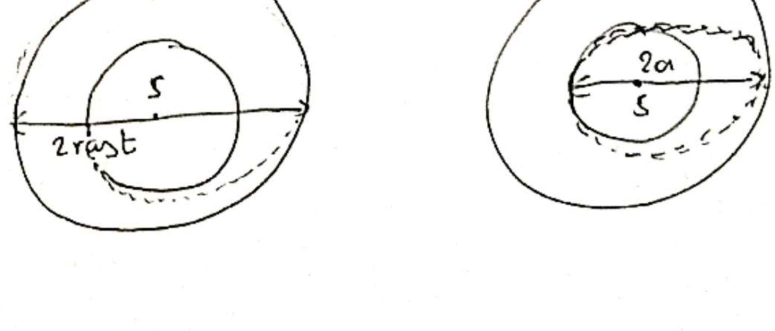
$$E_m = \frac{1}{2}m_p\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_p\frac{L^2}{m_p^2 r^2} - \frac{G m_p m_s}{r} = \boxed{\frac{1}{2}m_p\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{m_p r^2} - \frac{G m_p m_s}{r}}_{E_{eff}(r)}}$$

Q15) $\boxed{E_m = -\frac{1}{2}\frac{G m_p m_s}{a}}$

Q16) $\Delta E_m = E_m - E_{m_1} = -\frac{G m_p m_s}{2a} - \left(-\frac{G m_s m_p}{2 r_{ast}}\right)$

$\boxed{\Delta E_m = \frac{G m_s m_p}{2}\left(\frac{1}{r_{ast}} - \frac{1}{a}\right)}$ or comme $r_{ast} > a \Rightarrow \frac{1}{r_{ast}} < \frac{1}{a}$

finalement $\boxed{\Delta E_m < 0}$



$2a = r_{ast} + r_m$

Scanné avec CamScanner

Q17) $E_{m_1} = E_m(A) = \frac{1}{2} m_p v^2 - \frac{G m_p m_s}{r_{ast}} \Rightarrow v = \boxed{\sqrt{\frac{G m_s}{r_{ast}}}}$ ← Q12

↑ juste avant le changement de vitesse (sur la trajectoire circulaire)

$-\frac{G m_p m_s}{2a} = E_{m_2} = E_m(A^+) = \frac{1}{2} m_p v'^2 - \frac{G m_p m_s}{r_{ast}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_p v'^2 = -\frac{G m_p m_s}{2a} + \frac{G m_p m_s}{r_{ast}}$

Q15 ↑ juste après le changement de vitesse (sur la trajectoire elliptique)

$(v')^2 = -\frac{G m_s}{a} + 2\frac{G m_s}{r_{ast}}$

avec $\boxed{a = \frac{r_{ast} + r_m}{2}}$

$\boxed{v' = \sqrt{G m_s \left(\frac{2}{r_{ast}} - \frac{1}{a}\right)}}$ ⚠ bien convertir les distances en m

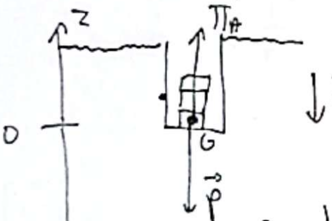
$\boxed{\Delta v = v' - v}$

A.N : $v' = 13,8 \times 10^3$ m/s

$v = 16,99 \times 10^3$ m/s $\Rightarrow$ $\Delta v = -3,16 \times 10^3$ m/s

Problème 3

Système : {Verre + n pièces} Bilan des forces :



$\downarrow \vec{g} = -g\vec{e}_z$

• Poussée d'archimède $\vec{\Pi}_A = -\mu V \vec{g}$

avec V le volume du verre $\boxed{V = Sh}$ *

• On néglige la pression de l'air sur le fond du verre (déjà prit en compte dans la poussée d'Archimède)

• Poids : $\vec{P} = M\vec{g} + n\, m\vec{g} = M_{tot}\vec{g}$

* On se place à la limite de flotabilité, le verre est quasiment totalement immergé

PFD appliqué au système dans le référentiel galiléen $M_{tot}\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A$

Projection sur O_z : $M_{tot}\ddot{z} = +\mu V g - M_{tot} g$. Le verre coule si $\boxed{\ddot{z} < 0}$

soit si $\mu V \cancel{g} - M_{tot}\cancel{g} < 0$

$\Leftrightarrow m \times n + M > \mu S h \Leftarrow \boxed{n > \frac{\mu S h - M}{m}}$ ← bien sans dimension $[\mu S h] = \frac{M}{L^3} \times L^3 = M$

A.N : $n_{limite} = 7,5$

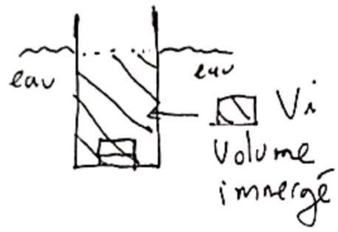
si $n = 7 \Rightarrow$ ne coule pas, si $n = 8 \Rightarrow$ coule

si A commence, il pose les pièces impaires $n=1, n=3, n=5, n=7$

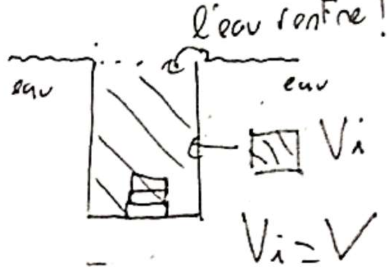
donc B pose la pièce $n=8$ ← il perd ! Donc A est certain de gagner.

Autre approche possible

On suppose maintenant que ce qui fait couler le verre c'est le fait qu'au bout d'un certain nombre de pièce l'eau "déborde" à l'intérieur :



$V_i < V$ le verre ne coule pas



$V_i = V$ dès que l'eau commence à rentrer

On suppose que le verre est à l'équilibre jusqu'à ce que :

$$V_i = V$$

si le verre est à l'équilibre $\|\vec{Poids}\| = \|\vec{\Pi_A}\|$

$$\Leftrightarrow (M + n \times m) g = \rho V_i g$$

$$\Leftrightarrow V_i = \frac{M + n \times m}{\rho}$$

le verre déborde si $V = V_i \Leftrightarrow Sh = \dfrac{M + n \times m}{\rho}$

$$\Leftrightarrow \boxed{n_{limite} = \frac{Sh\rho - M}{m}}$$

On retrouve la même condition !