Problème I

Q1) $\mathcal{P}(\vec{F}_{mag}) = \vec{F}_{mag} \cdot \vec{v} = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$ or $\vec{v} \wedge \vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$

donc $\mathcal{P}(\vec{F}_{mag}) = 0$

• Système : {particule}

• Bilan des forces : • Poids négligeable devant $\vec{F}_{mag}$

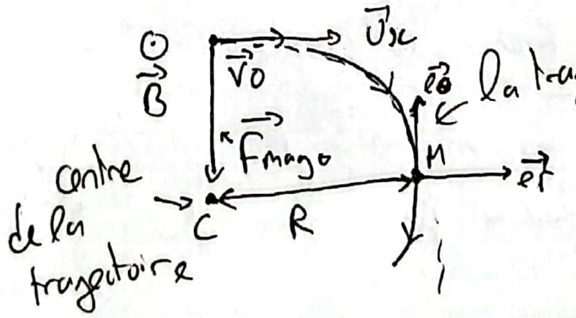
• $\vec{F}_{mag}$

Théorème de l'énergie cinétique sous forme puissance :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{ext}) \underset{\text{ici}}{=} 0 \iff E_c = \text{cste} \iff \frac{1}{2}mv^2 = \text{cste}$$

donc $\boxed{v = \text{cste}}$

Q2) $\uparrow \vec{u_y}$; $\vec{F}_{mag_0} = qv_0\vec{u_x} \wedge B_0\vec{u_z} = \underline{-qv_0B_0\vec{u_y}}$



la trajectoire est courbée dans ce sens

Q3) $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = -v_0\vec{e_\theta}$ $\boxed{\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{e_r}}$ ($v = \|\vec{v}\| = v_0$) (ici $\frac{dv}{dt} = 0$ ← Q1)

Q4) en appliquant le PFD au système :

$m\vec{a} = \vec{F}_{mag}$ avec $\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(-v_0\vec{e_\theta} \wedge B_0\vec{u_z}) = -qv_0B_0\vec{e_r}$

$\iff -m\frac{v_0^2}{R}\vec{e_r} = -qv_0B_0\vec{e_r}$ projection sur $\vec{e_r}$:

$$\frac{mv_0^2}{R} = qv_0B_0$$

$\boxed{R = \frac{mv_0}{qB_0}}$ avec $\boxed{\omega_c = \frac{qB_0}{m}}$

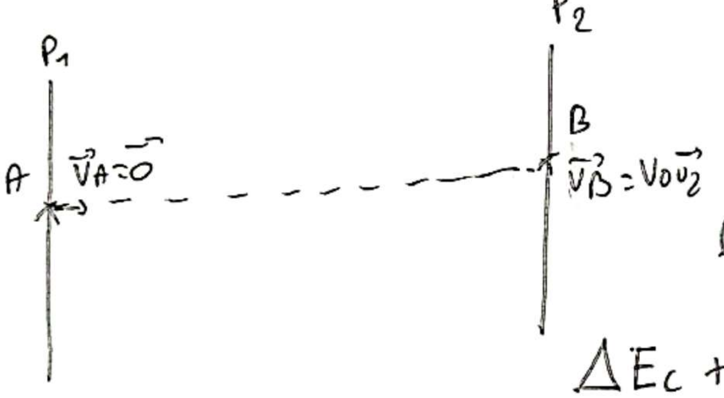
er

Q5) Le champ électrique est dirigé vers les potentiels décroissants donc ici $\vec{E}$ est selon $+\vec{e_z}$ si $V(P_2) < V(P_1)$

comme la force électrique est $\vec{F_e} = q\vec{E}$ avec $q>0$ pour un cation

Pour avoir une force qui accélère les cations, elle doit être selon $+\vec{u_z}$ donc $\vec{E}$ aussi et $\boxed{U<0}$

Q6)



on applique le théorème de l'énergie mécanique lors du mouvement de A vers B

$$\Delta E_{c\,A\to B} + \Delta E_{p\,A\to B} = 0$$

Il n'y a pas de forces non conservatives qui s'appliquent sur le système

Si on néglige le poids $E_p = +qV = eV$

cation de charge e

on a alors :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 + eV_B - eV_A = 0$$

vitesse initiale nulle

$$v_B^2 = \frac{2}{m} \times e \underbrace{(V_A - V_B)}_{-U}$$

avec $-U > 0$

$$\Rightarrow \boxed{v_B = V_0 = \sqrt{\frac{2q(-U)}{m}}}$$

Scanné avec CamScanner

Q7) $\vec{F}_{mag} = q(\underbrace{v_0\vec{u_z}}_{\vec{v_0}} \wedge B_0\vec{u_z}) = \vec{0}$

$\uparrow$ $/\!/ \vec{B}$

$\|\vec{F}_{mag}\| = \|q\vec{v_0}\| \|B_0\| \times \sin(\underbrace{\text{angle entre } \vec{v_0} \text{ et } \vec{B_0}}_{0 \text{ ici}})$

Le PFD donne $m\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{cste} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} V_x = \dot{x} = 0 \\ V_y = \dot{y} = 0 \\ V_z = \dot{z} = V_0 \end{cases}$ Primitive

vitesse initiale $\dot{z}(0) = V_0$

Le cation n'est pas confiné car il se déplace librement selon (Oz) à vitesse constante il peut aller à l'infini si pas d'obstacles

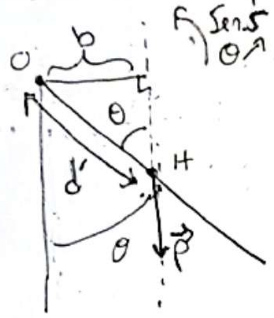
Q8 A.N $R = 5 \times 10^{-5}$ m << Rayon interne
donc le plasma ne touche pas les bords (ce qui est une bonne nouvelle car sa température peut atteindre 1 million de °C!)

Problème 2

Q1) $\boxed{L_{Ox} = J\dot{\theta}}$

Q2) La liaison est parfaite donc $\underline{\mathcal{M}_{Ox}(\text{action de liaison}) = 0}$

Q3)



$\Gamma_{Ox} = - b \times \|\vec{P}\| = \boxed{- d' \sin\theta\, m_0 g}$

le poids fait tourner la jambe dans le sens θ décroissant

Q4) Système : {jambe}

bilan des moments : Γ_{Ox}

Théorème du moment cinétique par rapport à Ox :

$$\frac{d}{dt}(L_{Ox}) = \Gamma_{Ox} \iff \frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = - d' \sin\theta\, m_0 g$$

$$\iff J\ddot{\theta} = - d' \sin\theta\, m_0 g$$

$$\iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{d' m_0 g}{J} \sin\theta = 0}$$

Q5) $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2}$

Q6) $\ddot{\theta} + \frac{d' m_0 g}{J} \sin\theta = 0 \quad \times\dot{\theta}$

$$\underbrace{\ddot{\theta}\dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)} + \frac{d' m_0 g}{J} \underbrace{\sin\theta\, \dot{\theta}}_{-\frac{d}{dt}(\cos\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{d' m_0 g}{J} \cos\theta \right) = 0$$

$\times J$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - d' m_0 g \cos\theta \right) = 0 \overset{\text{Primitive}}{\Rightarrow} \overbrace{\boxed{\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - m_0 g d' \cos\theta + \text{cste} = \text{cste}}}^{E_m = E_c + E_{pp} = \text{cste} \text{ donc une intégrale 1ère}}$$

Q7 $\sin\theta \simeq \theta$ (petits angles)

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{m_0 g d'}{J}\theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$ ← équat° diff d'un oscillateur harmonique

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_0 g d'}{J}}$

pulsation propre

la période propre est $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_0 g d'}}}$

Q8 $d' = \frac{L}{2}$ (Centre d'inertie au milieu de la jambe)

$$J = K m_0 L^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{J}{m_0 g d'}} = \sqrt{\frac{K \cancel{m_0} L^2}{\cancel{m_0} g \frac{L}{2}}} = \sqrt{\frac{2KL}{g}}$$

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2KL}{g}}}$ bien indépendant de m_0 et proportionnelle à $\sqrt{L}$

Q9) $T_{adulte} = \alpha \times \sqrt{L_{adulte}}$ (proportionnelle à $\sqrt{L_{adulte}}$)

$T_{enfant} = \alpha \times \sqrt{L_{enfant}}$ (prop à $\sqrt{L_{enfant}}$)

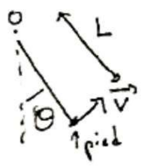
$$\Rightarrow \frac{T_{adulte}}{T_{enfant}} = \frac{\alpha \times \sqrt{L_{adulte}}}{\alpha \times \sqrt{L_{enfant}}} = \sqrt{\frac{L_{adulte}}{L_{enfant}}}$$

$$\boxed{T_{enfant} = T_{adulte}\sqrt{\frac{L_{enfant}}{L_{adulte}}}} \Rightarrow \underbrace{T_{adulte}}_{1,6}\sqrt{\frac{40}{90}}$$

A.N $\boxed{T_{enfant} = 1,07\ s}$

Scanné avec CamScanner

Q10) la vitesse du randonneur est égale à la vitesse du pied (bout de la jambe) (hypothèse)



On a alors : $\underline{V = L\dot{\theta}}$ avec $\dot{\theta} = \omega_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{V = L\omega_0}$

$$V = \frac{L 2\pi}{T}$$

$$V = \frac{L \times 2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{2kL}{g}}} = \boxed{\sqrt{L} \times \sqrt{\frac{g}{2k}}}$$ bien proportionnelle à L !

$$\frac{V_{enfant}}{V_{adulte}} = \frac{\sqrt{L_{enfant}}}{\sqrt{L_{adulte}}} \Rightarrow V_{enfant} = \sqrt{\frac{40}{90}} \times V_{adulte}$$

$$V_{adulte} \simeq \underbrace{\sqrt{\frac{90}{40}}}_{1,5\,!} V_{enfant}$$

Problème 3

Q1) système : {Mars}

Bilan des forces : . force gravitationnelle soleil sur Mars :

$$\vec{f_g} = -\frac{G m_S m_M}{r_M^2}\vec{u_r}$$

PFD appliqué à Mars si mouvement circulaire $\left(\vec{a} = -\frac{v^2}{r_M}\vec{u_r}\right)$

$$m\vec{a} = \vec{f_g} \iff m\left(-\frac{v^2}{r_M}\vec{u_r}\right) = -\frac{G m_S m_M}{r_M^2}\vec{u_r}$$

(v vitesse de mars sur son orbite)

Par projection sur $\vec{u_r}$:

$$v = \sqrt{\frac{G m_S}{r_M}}$$

comme la vitesse est uniforme :

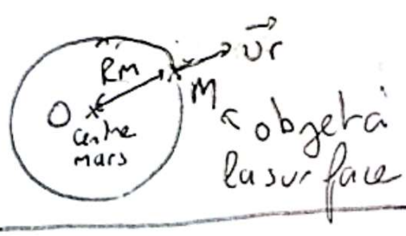
$$v = \frac{2\pi r_M}{T_{mars}}$$

$$\Rightarrow T_{mars} = \frac{2\pi r_M}{v} = \boxed{\frac{2\pi r_M \sqrt{r_M}}{\sqrt{G m_S}}}$$

A.N $T_{mars} = \underline{5{,}86\,10^7\,s}$

soit 678 jours $\simeq \underline{1{,}86\,an}$

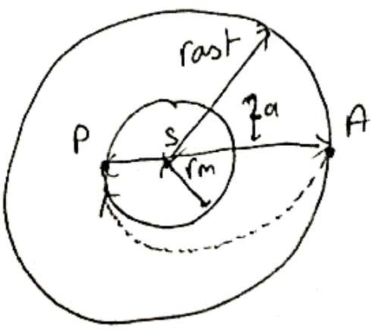
Q2) $$\boxed{\vec{f}_{g,mars} = -\frac{G m_M m}{R_M^2}\vec{u_r}}$$



Q3) $m \times \vec{g}_{mars} = -\frac{G m_M m}{R_M^2}\vec{u_r} \Rightarrow \boxed{\vec{g}_{mars} = -\frac{G m_M}{R_M^2}\vec{u_r}}$

Q4) A.N $\underline{g_{mars} \simeq 3{,}7\,m.s^{-2}} < g = 10\,m.s^{-2}$

Q5



Q6 le système ne subit pas de forces non conservatives donc $\underline{Em = cste}$ (TEM)

Le moment par rapport à S de la force centrale est nul ($\vec{F_G} \parallel \vec{SM}$) donc le moment cinétique se conserve

(TMC) : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\mathcal{M}_S(\vec{F_G})}_{=\vec{0}} \quad \underline{= \vec{L} = cste}$

Q7 Le PFD appliqué à l'astéroïde en mouvement circulaire ds le réf héliocentrique donne :

$$-m_p\frac{v^2}{r_{ast}}\vec{e_r} = -\frac{m_p m_s G}{r_{ast}^2}\vec{e_r} \xRightarrow{\text{Projecto sur } \vec{e_r}} \boxed{v = \sqrt{\frac{Gm_s}{r_{ast}}}}$$

$$Em_1 = \frac{1}{2}m_p v^2 - \frac{Gm_s m_p}{r_{ast}} = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{Gm_s m_p}{r_{ast}}}$$

Q8 $\vec{SM} = r\vec{e_r} \underset{\vec{v}=\frac{d\vec{SM}}{dt}}{\Rightarrow} \boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge m\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} m\dot{r} \\ mr\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z}} = \boxed{mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}}$$

Q9

$$Em = \frac{1}{2}m_p\vec{v}\cdot\vec{v} - \frac{Gm_pm_s}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{Gm_pm_s}{r}$$

or $L = ||L|| = m_p r^2\dot{\theta} \Rightarrow (r\dot{\theta})^2 = r^2\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m_p^2 r^2}$

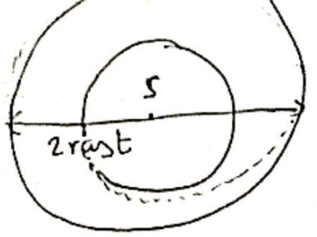
$$Em = \frac{1}{2}m_p\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_p\frac{L^2}{m_p^2r^2} - \frac{Gm_pm_s}{r} = \frac{1}{2}m_p\dot{r}^2 + \boxed{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{m_pr^2} - \frac{Gm_pm_s}{r}}_{E_{eff}(r)}}$$

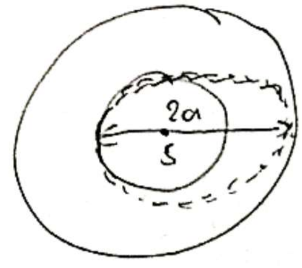
Q 9 $\boxed{Em = -\frac{1}{2}\frac{Gm_pm_s}{a}}$

Q 10 $\Delta Em = Em - Em_1 = -\frac{Gm_pm_s}{2a} - \left(-\frac{Gm_sm_p}{2r_{ast}}\right)$

$\boxed{\Delta Em = \frac{Gm_sm_p}{2}\left(\frac{1}{r_{ast}} - \frac{1}{a}\right)}$ or comme $r_{ast} > a \Rightarrow \frac{1}{r_{ast}} < \frac{1}{a}$

finalement $\boxed{\Delta Em < 0}$





$2a = r_{ast} + r_m$

Q11 $E_{m_1} = E_m(A) = \frac{1}{2} m_p v^2 - \frac{G m_p m_s}{r_{ast}} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{G m_s}{r_{ast}}}}$ ← Q12

juste avant le changement de vitesse (sur la trajectoire circulaire)

$-\frac{G m_p m_s}{2a} = E_m = E_m(A^+) = \frac{1}{2} m_p v'^2 - \frac{G m_p m_s}{r_{ast}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_p v'^2 = -\frac{G m_p m_s}{2a} + \frac{G m_p m_s}{r_{ast}}$

Q15

juste après le changement de vitesse (sur la trajectoire elliptique)

$(v')^2 = -\frac{G m_s}{a} + 2\frac{G m_s}{r_{ast}}$

avec $\boxed{a = \frac{r_{ast} + r_m}{2}}$

$\boxed{v' = \sqrt{G m_s \left(\frac{2}{r_{ast}} - \frac{1}{a}\right)}}$

⚠ bien convertir les distances en m

$\boxed{\Delta v = v' - v}$

A.N : $v' = 13,8 \times 10^3$ m/s

$v = 16,99 \times 10^3$ m/s $\Rightarrow \Delta v = -3,16 \times 10^3$ m/s

Scanné avec CamScanner