Programme de colles n° 24

Semaine du 21/04/2025 au 25/04/2025

☞ ***Espaces vectoriels, dimension*** ☜

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 18 — Polynômes —

Révisions. On donnera un petit automatisme ou question de cours sur ce chapitre à chacun(e).

— Chapitre 19 — Comparaisons asymptotiques —

Révisions. On donnera un petit automatisme ou question de cours sur ce chapitre à chacun(e).

— Chapitre 20 — Espaces vectoriels —

1 Des vecteurs du plan aux espaces vectoriels
- 1.1 Introduction
- 1.2 Les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$
- 1.3 Généralisation à $\mathbb{K}^n$
- 1.4 La notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- 1.5 Espaces vectoriels usuels (♡♡♡)
- 1.6 Règles de calcul
- 1.7 Combinaisons linéaires

2 Sous-espaces vectoriels
- 2.1 Définition, exemples
- 2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels
- 2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie

3 Familles libres, génératrices, bases
- 3.1 Famille génératrice
- 3.2 Familles libres, familles liées
- 3.3 Base d'un espace vectoriel

4 Somme de sous-espaces vectoriels
- 4.1 Somme de deux sous espaces vectoriels
- 4.2 Somme directe
- 4.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

— Chapitre 21 — Espaces vectoriels de dimension finie —

1 Dimension d'un espace vectoriel
- 1.1 Espace vectoriel de dimension finie
- 1.2 Existence d'une base en dimension finie
- 1.3 Dimension d'un espace vectoriel
- 1.4 Conséquences sur les familles de vecteurs, caractérisation des bases. Application au cas de la dimension infinie. Caractérisation des bases parmi les familles de bon cardinal

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 20. Définir $f : E \to F$ est linéaire, Ker f et Im f et montrer que ce sont sous-espaces vectoriels respectivement de E et F.
- Chapitre 20. Liberté des familles de polynômes non nuls échelonnées en degré.
- Chapitre 21. Montrer que E est de dimension infinie *ssi* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs E tels que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. Application pour montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**
  Exemples : montrer que $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π-périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**
  Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**
  Exemples : résoudre $x\,|x| \leqslant 3x+2$, montrer que $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \longmapsto \dfrac{\cos x + 2}{x^2+4}$ sur $[\,0\,;1\,]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n-ièmes).
  Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$, les racines carrées de $3 - 4\mathrm{i}$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  Exemples : donner la formule pour $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$, écrire $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  Exemples : définir Arctan, simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \longmapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$, de $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$, de $x \longmapsto \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**
  Exemples : $\displaystyle\int^x \cos t\, \mathrm{e}^{2t}\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t$ en posant $t = \sin x$.

- **Équations différentielles.**
  Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**
  Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\lim \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, adjacence des suites définies par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$, savoir démontrer que $n!/n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- **Matrices.**
  Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.
  Exemples : dérivée n-ième de $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$, $|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leqslant |x-y|$ pour tous x,y, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$.

- **Espaces vectoriels** : montrer rapidement que des ensembles sont des s.e.v. et en donner une base, en particulier pour l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, de droites, plans ou d'intersections de tels ensembles dans $\mathbb{K}^n$, des s.e.v de polynômes, etc.
  Exemples : $\left\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\right\}$, $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$
  $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z - t = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4y + z + 3t = 0\right\}$.