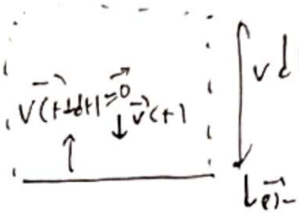
TD20 correction

Exo 2

PFD sur une goutte entre t et $t+dt$ (qui touche la vitre entre t et $t+dt$)



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{vitre/goutte} \Leftrightarrow \frac{\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_{vitre/goutte}$$

$$\vec{p}(t) = mV\vec{e_x} \text{ et } \vec{p}(t+dt) = \vec{0}\,\vec{e_x}$$

la goutte "explose" au contact de la vitre

$$\Delta\vec{p}_{goutte} = -mV\vec{e_x}$$

Par act° et réact° $\Delta\vec{p}_{vitre} = -\Delta\vec{p}_{goutte} = \underline{mV\vec{e_x}}$

2) Ce sont les gouttes dans un cylindre de section S et hauteur $L = v\,dt$ au dessus de la vitre soit $N = n \times V$

<u>qui possèdent une vitesse selon $+\vec{e_x}$</u> $\quad \underline{N = n \times S\,dt\,v}$

⚠ ici c'est le cas de toutes les gouttes!

(à la différence des molécules de gaz)

3) $$\vec{F}_{N gouttes/vitre} \underset{-\iint P\vec{dS}}{=} PS\vec{e_x} \underset{act°/réact°}{=} -\vec{F}_{vitre/N gouttes} \underset{\substack{PFD \\ sur\ N gouttes}}{=} -N\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$PS\vec{e_x} = -N\frac{\Delta\vec{p}_{goutte}}{dt} = -\frac{\overset{n \times S\,dt\,v}{\overbrace{N}}\,mV}{dt}\vec{e_x}$$

Projection sur $\vec{e_x}$

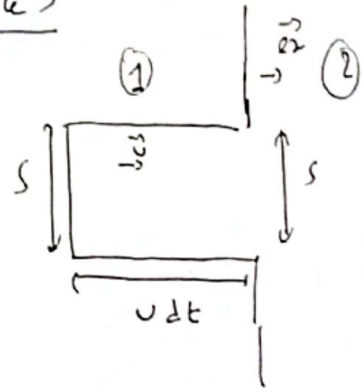
$$P\cancel{S} = \frac{n\cancel{S}\cancel{dt}v \times mv}{\cancel{dt}} \Leftrightarrow \boxed{P = mv^2n}$$

A.N $P = 1\times10^{-4} \times 2^2 \times \frac{1000}{2} = \boxed{2\times10^{-1}\ Pa}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

1)



Les molécules qui traversent S pour aller dans le compartiment 2 sont situées dans un cylindre de hauteur $u \times dt$ et section S ds le compartiment 1

comme les molécules peuvent avoir des vitesses selon : $+\vec{e_x}$, $-\vec{e_x}$, $+\vec{e_y}$, $-\vec{e_y}$, $-\vec{e_z}$, $+\vec{e_z}$

seulement les molécules qui ont une vitesse selon $+\vec{e_x}$ passent soit $\frac{1}{6}$ des molécules dans le cylindre

on a donc

$$dN_{1\to2} = \frac{\overset{\text{densité de molécule}}{n_1}}{6} \times V_{cylindre} = \frac{N_1(t)}{6 \times \underbrace{V}_{\text{volume total du compartiment}}} \times S \times u\,dt$$

$$\boxed{dN_{1\to2} = \frac{N_1(t)}{6}\frac{S}{V}u\,dt}$$

2) de même $\boxed{dN_{2\to1} = \frac{N_2(t)}{6}\frac{S}{V}u\,dt}$

3) $\Rightarrow \dfrac{dN_{1\to2}}{dt} = \dfrac{N_1}{6}\dfrac{S}{V}u$

$$\frac{dN_{2\to1}}{dt} = \frac{N_2}{6}\frac{S}{V}u$$

3) suite pendant dt le compartiment ① : gagne $dN_{2\to1}$ molécules
. perd $dN_{1\to2}$ molécules

La variation infinitésimale de molécules est donc $dN_1 = dN_{2\to1} - dN_{1\to2}$

soit $\boxed{\dfrac{dN_1}{dt} = \dfrac{dN_{2\to1}}{dt} - \dfrac{dN_{1\to2}}{dt} = \dfrac{N_2 - N_1}{6}\dfrac{S}{V}u}$

De même ds $\boxed{\dfrac{dN_2}{dt} = \dfrac{dN_{1\to2}}{dt} - \dfrac{dN_{2\to1}}{dt} = \dfrac{N_1 - N_2}{6}\dfrac{S}{V}u}$

4) $\underbrace{N_{tot}}_{N_A} = N_1 + N_2 = cste \iff \dfrac{dN_{tot}}{dt} = 0 \iff \boxed{\dfrac{dN_1}{dt} = -\dfrac{dN_2}{dt}}$

$\boxed{N_2 = N_A - N_1}$

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{N_2 - N_1}{6}\frac{S}{V}u = \frac{N_A - 2N_1}{6}\frac{S}{V}u$$

$$\boxed{\frac{dN_1}{dt} + \frac{S}{3V}u\,N_1(t) = \frac{N_A}{6}\frac{S}{V}u}$$

éq diff 1^er ordre avec $\boxed{\tau = \frac{3V}{SU}}$ et $N_{1p(t)} = \frac{N_A}{2}$

A.N pour τ avec $V = 1m^3$, $S = 1cm^2 = 10^{-4}$, $U = 10^3 m/s$

$\boxed{\tau \simeq 30s}$

Ainsi $N_1(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{N_A}{2}$, à $t=0$ $N_1(0) = N_A$ $\Rightarrow \boxed{N_1(t) = \frac{N_A}{2}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

5) $N_2(t) = N_A - N_1(t) \Rightarrow \boxed{N_2(t) = \frac{N_A}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

6) On ne refait pas toute la démo du cours mais $P_1 = \frac{1}{3} n_1 m u^2$ avec $n_1 = \frac{N_1(t)}{V}$

$P_1(t) = \frac{1}{3}\frac{N_1(t)}{V} m u^2 = \frac{N_A}{6}\frac{mu^2}{V}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \boxed{\frac{P_0}{2}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

$\frac{dP_1}{dt} \underset{m,u \text{ cste}}{\propto} \frac{dN_1}{dt} = \boxed{-\frac{1}{\tau} N_1(t)}$

7) $\tau = \frac{3V}{SU}$ or Par 1 molécule $\langle Ec \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

et $\langle Ec \rangle = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$

or $\langle v^2 \rangle = U^2$ donc $\frac{1}{2} m U^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow U = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$.

↑ vitesse quadratique au carré

donc $\boxed{\tau = \frac{3V}{S} \times \sqrt{\frac{m}{3 k_B T}}}$

si $m \nearrow$
$\tau \nearrow$
τ prop à $\sqrt{m}$

8) si $m_D > m_H$ $\tau_H < \tau_D$ pendant une durée t
il y a plus de molécules de H_2 que de D_2
qui traversent le trou
le gaz dans le compartiment ①
s'enrichit donc en dideutérium !

EXERCICE 4

1. $\Delta U = m c_{v\,masse} \Delta T$ or $\rho_{eau} = \dfrac{m_{eau}}{V}$ donc

$$\boxed{\Delta U = \underbrace{\rho_{eau} V}_{M} \, c_{v\,eau\,liquide} \Delta T}$$ avec $\rho_{eau} = 1\,kg.L^{-1} = 10^3\,kg.m^{-3}$.

ML^2T^{-2} $\quad$ M $\quad$ $ML^2T^{-2}\Theta^{-1}M^{-1}$ $\quad$ Θ $\rightarrow$ homogène

A.N. $\Delta U = 1000 \times 0{,}25.10^{-3} \times 4{,}18.10^3 \times (100 - 15)\,J \Rightarrow \underline{\Delta U = 89\,kJ}$

Rq : . la conversion en K n'est pas necessaire car on a $\Delta T = T_f - T_i$.
. on pourrait laisser ρ en $kg.L^{-1}$ à condition de prendre V en L (mais l'unité SI est m^3)

2. $\Delta U = m \times c_{v\,vapeur\,d'eau} \times \Delta T$ avec $m \equiv$ masse d'une mole d'eau
or $n = \dfrac{m}{M}$ donc $\boxed{\Delta U = n M_{eau} c_{v\,vapeur\,d'eau} \Delta T}$

⚠ ne surtout pas remplacer n par 1 dans l'expression littérale sinon ce n'est pas homogène...

A.N. $\Delta U = 1{,}0 . 18.10^{-3} \times 1{,}85.10^3 \times (200 - 115)\,J \Rightarrow \underline{\Delta U = 2{,}8\,kJ}$

3. Hélium assimilé à un GPM $\Rightarrow$ $C_v = \frac{3}{2} nR$ (à savoir !)

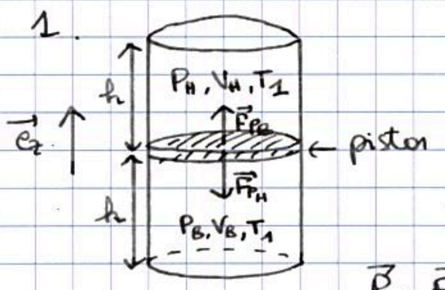
Alors $\boxed{\Delta U = C_v \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T}$ (Valable $\forall$ la transfo, pas besoin de isochore)

A.N. $\Delta U = \frac{3}{2} \times 1{,}0 . 8{,}31 \times (35 - 10)\,J \Rightarrow \underline{\Delta U = 3{,}2.10^2\,J}$

EXERCICE 5

Système : {piston} $\quad$ Ref : RG.

1.



Bilan des forces : $\begin{cases} \text{Force de pression } \vec{F}_{P_B} \uparrow \\ \text{Force de pression } \vec{F}_{P_H} \downarrow \\ \text{Poids} \end{cases}$

PFD appliqué au piston à l'equilibre :

$$\vec{P} + \vec{F}_{P_H} + \vec{F}_{P_B} = \vec{0} \Rightarrow -mg - P_H S + P_B S = 0$$

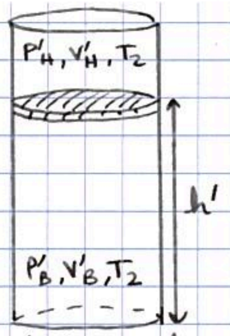
donc $P_B = P_H + \dfrac{mg}{S}$ or $\sigma = \dfrac{m}{S}$ donc

$$\boxed{P_B = P_H + \sigma g}$$ $P_B > P_H \rightarrow$ cohérent

A.N. ⚠ P à mettre en Pa ! $1\,bar = 10^5\,Pa$. $P_B = 0{,}133.10^5 + 1360 \times 9{,}8\,Pa$
soit

$\underline{P_B = 2{,}7.10^4\,Pa = 0{,}27\,bar}$

2. Avant la transfo, on a des "compartiments égaux" $\Rightarrow V_B = V_H = \dfrac{V}{2}$.
grâce à 1, on connait P_H et P_B. De plus, T_H et T_B valent T_0.
↳ Qu'en est-il après la transfo ?



après la transfo

Dans cette question on cherche à déterminer et calculer $\frac{h'}{h}$.

On a d'abord $\begin{cases} h'S = V'_B \\ hS = V_B \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{h'}{h} = \frac{V'_B}{V_B}}$ (1)

L'équilibre du piston donne, d'après 1. $\boxed{P'_B = P'_H + \sigma g}$ (2)

De plus, appliquons la loi des GP pour chaque compartiment :

- pour le compartiment du haut :

$$\begin{cases} P'_H V'_H = n_H R T_2 \\ P_H V_H = n_H R T_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P'_H V'_H}{T_2} = \frac{P_H V_H}{T_1} \Rightarrow \boxed{\frac{V'_H}{V_H} = \frac{T_2}{T_1}\frac{P_H}{P'_H}} \quad (3)$$

- pour le compartiment du bas :

$$\begin{cases} P'_B V'_B = n_B R T_2 \\ P_B V_B = n_B R T_2 \end{cases}$$

on utilise (2) et la qu. 1 $\Rightarrow \begin{cases} (P'_H + \sigma g) V'_B = n_B R T_2 \\ (P_H + \sigma g) V_B = n_B R T_2 \end{cases}$

soit $\boxed{\frac{V'_B}{V_B} = \frac{T_2}{T_1}\frac{(P_H + \sigma g)}{(P'_H + \sigma g)}}$ (4) or d'après (1) $\frac{V'_B}{V_B} = \frac{h'}{h}$ donc

$$\boxed{\frac{h'}{h} = \frac{T_2}{T_1}\frac{P_H + \sigma g}{P'_H + \sigma g}} \quad (5)$$

On cherche la valeur num. de $\frac{h'}{h}$. Or dans (5) on connaît tout sauf P'_H. Si on arrive à le calculer c'est gagné !

On a $V = V_H + V_B = V'_H + V'_B$ avec $V_H = V_B = \frac{V}{2}$ ("deux compartiments égaux")
↳ possible si $n_H \neq n_B$.

donc $2V_H = V'_H + V'_B$

$$\underset{(3)\text{ et }(4)}{\Rightarrow} \quad 2V_H = \frac{T_2}{T_1}\frac{P_H}{P'_H}V_H + \frac{T_2}{T_1}\frac{(P_H+\sigma g)}{(P'_H + \sigma g)}\underbrace{V_B}_{= V_H\ !}$$

soit $2 = \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{P_H}{P'_H} + \frac{P_H + \sigma g}{P'_H + \sigma g}\right)$ → Tout est connu ici sauf P'_H, que l'on cherche ! Plus qu'à l'isoler et remplacer dans (5).

$$\Rightarrow \frac{2T_1}{T_2} = \frac{P_H(P'_H + \sigma g) + P'_H(P_H + \sigma g)}{P'_H(P'_H + \sigma g)}$$

$$\Rightarrow \frac{2T_1}{T_2}\left(P_H'^2 + P'_H \sigma g\right) = P_H P'_H + P_H \sigma g + P'_H P_H + P'_H \sigma g$$

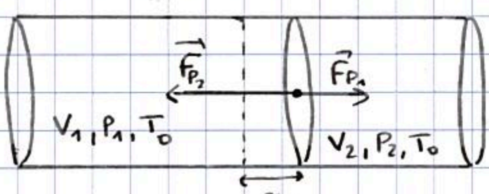
$$\Rightarrow \boxed{P_H'^2\left(\frac{2T_1}{T_2}\right) + P'_H\left(\frac{2T_1}{T_2}\sigma g - 2P_H - \sigma g\right) - P_H \sigma g = 0}$$

Équation du 2nd degré. La seule solution positive est $\underline{P'_H = 2{,}0.10^4 \text{ Pa}}$

On en déduit (5) : $\boxed{\frac{h'}{h} = \frac{T_2}{T_1}\frac{P_H + \sigma g}{P'_H + \sigma g}}$ A.N. $\frac{h'}{h} = \frac{100 + 273{,}15}{273{,}15} \times \frac{2{,}7.10^4}{2{,}0.10^4 + 1360 \times 9{,}8}$

$$\frac{h'}{h} = \underline{1{,}1}.$$

EXERCICE 6



1. Système : {piston} Référentiel : TSG
BDF : $\vec{P}$ compensé par $\vec{R}$
Forces de pression à gauche et à droite du piston ($\vec{F_{P_1}}$ et $\vec{F_{P_2}}$)

Transfo isotherme : $T_{int} = T_0$ dans chaque compartiment

PFD projeté sur (Ox) $\quad P_1 S - P_2 S = m\ddot{x}$

or $P_1 V_1 = nRT_0 \Rightarrow P_1 = \dfrac{nRT_0}{V_1} = \dfrac{nRT_0}{S(L+x)}$

De même, $P_2 = \dfrac{nRT_0}{S(L-x)}$ et donc on a : $\dfrac{nRT_0}{L+x} - \dfrac{nRT_0}{L-x} = m\ddot{x}$

donc

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{nRT_0}{m}\left(\frac{1}{L-x} - \frac{1}{L+x}\right) = 0}$$

2. Si $x \ll L$, on peut effectuer un dl avec $\frac{x}{L} \ll 1$.

$\ddot{x} + \dfrac{nRT_0}{mL}\left(\dfrac{1}{1-x/L} - \dfrac{1}{1+x/L}\right) = 0$ or $\dfrac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{\sim} 1 - x$

donc $\dfrac{1}{1-x/L} \sim 1 + \dfrac{x}{L}$ et $\dfrac{1}{1+x/L} \sim 1 - \dfrac{x}{L}$ et donc

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2nRT_0}{mL^2}x = 0}$$

→ Ceci est cohérent car on a des oscillations autour de $x = 0 = x_{eq}$.
→ Ceci est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2nRT_0}{mL^2}}$

Rq : $\left[\sqrt{\dfrac{2nRT_0}{mL^2}}\right] = \left(\dfrac{ML^2T^{-2}}{ML^2}\right)^{1/2} = T^{-1}$ → ok

↑ car $[nRT] = [PV] = $ [énergie] → à retenir, très pratique !

donc $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ soit :

$$\boxed{T = 2\pi L\sqrt{\frac{m}{2nRT_0}} = 2\pi L\sqrt{\frac{m}{2P_0V_0}}}$$

Chap Exo : existence d'une atmosphère à la surface des planètes

1) La vitesse de libération est obtenue pour une énergie mécanique nulle : $E_m = \frac{1}{2} m v_\ell^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

Vitesse quadratique moyenne : $u = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$ (cf cours)

On a donc :

		et à $T = 300\,K$:
Mercure	$v_\ell = 4{,}24\ km.s^{-1}$	$u_{H_2} = 1{,}94\ km.s^{-1}$
Vénus	$v_\ell = 10{,}4\ km.s^{-1}$	$u_{N_2} = 0{,}52\ km.s^{-1}$
Terre	$v_\ell = 11{,}2\ km.s^{-1}$	
Mars	$v_\ell = 5{,}01\ km.s^{-1}$	

u est une vitesse moyenne : certaines particules vont bien plus vite que u. Donc si u est trop proche de v_ℓ, les particules peuvent s'échapper. C'est ce qui peut expliquer l'absence d'atmosphère sur Mercure et Mars, alors qu'il y en a une sur la Terre et sur Vénus.

2) Il faudrait $u_{N_2} = v_\ell$, soit $T = 1{,}4.10^5\,K$

Ex 8

1)a) S' s'ouvre si la pression dans le cylindre C est supérieure à celle dans le reservoir

initialement dans le reservoir $P_R = P_0$

initialement dans le cylindre $P_C = P_a$

Pendant la descente du piston, S se ferme et P_C augmente

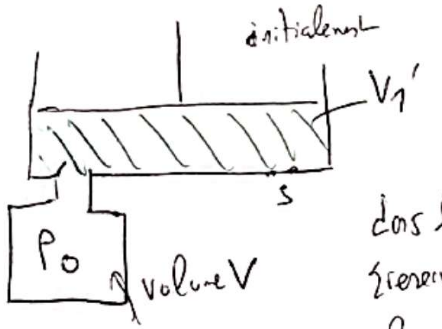
Comme S et S' sont fermées au début de la descente, la quantité de matière ds C reste constante. D'après la loi ds G.P $PV = nRT$ si T et n cstes alors $\boxed{PV = cste}$

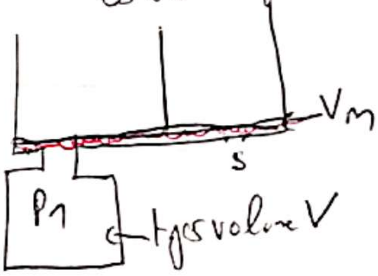
initialement $P_C V_C = P_a V_M$

à l'instant ou S' s'ouvre on a $P_C = P_R$ (ensuite) soit $P_C = P_0$ et $V_c = V_1'$

ainsi $P_a V_M = P_0 V_1' \Rightarrow \boxed{V_1' = \frac{P_a V_M}{P_0}}$

b)





dans l'ensemble {reservoir + cylindre} la quantité de matière reste constante donc $PV = cste$

ainsi $P_0(V_1' + V) = P_1(V_m + V)$

$$\boxed{P_1 = P_0\left(\frac{V_1'+V}{V_m+V}\right) = P_0\left(\frac{\frac{P_a V_m}{P_0}+V}{V_m+V}\right)}$$

$$P_1 = \frac{P_a V_m}{V_m+V} + \frac{P_0 V}{V_m+V}$$

Rmq:
- à la remontée comme s est ouverte et s' est fermé P_1 ne varie pas dans le reservoir

c) Pour que S' s'ouvre il faut $V_1' \geq V_m$ $\Leftrightarrow \frac{P_a V_m}{P_0} \geq V_m$ donc $P_0 \leq \frac{P_a V_M}{V_m} \Leftrightarrow P_0 \leq P_{max}$ avec $\boxed{P_{max} = \frac{P_0 V_M}{P_m}}$

2) Pour P_2 le raisonnement est le m̂ que pour P_1 mais on remplace P_1 par P_2 et P_0 par P_1

donc P_2 $\quad P_2 = \frac{P_a V_m}{V_m+V} + \frac{P_1 V}{V_m+V}$

Soit P_n qui suit une suite arithmetico-géométrique de relat° de récurrence $\boxed{P_{n+1} = \frac{P_a V_m}{V_m+V} + \frac{P_n V}{V_m+V}}$ et $P_0 = P_0$

de la forme $U_{n+1} = aU_n + b$ avec $a = \frac{V}{V_m+V}$ et $b = \frac{P_a V_M}{V_m+V}$

D'après le cours de math:

$$P_n = a^n (P_0 - r) + r \quad \text{avec } r = \frac{b}{1-a} = \frac{P_A V_M}{V_m}$$

finalement on trouve bien

$$P_n = \left(\frac{V}{V_m+V}\right)^n \left(P_0 - \frac{P_a V_M}{V_m}\right) + \frac{P_a V_M}{V_m}$$

3) $\frac{V}{V_M+V} < 1$ donc $\left(\frac{V}{V_m+V}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \boxed{P_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{P_a V_M}{V_m}} = P_{max}$ (logique!)

4) A.N $P_1 = \underline{1{,}05 \text{ bar}}$

$$P_{max} = \frac{1 \times 0{,}25}{0{,}01} = \underline{25 \text{ bar}}$$