Programme de colles n° 25

Semaine du 28/04/2025 au 02/05/2025

☞ ***Espaces vectoriels, dimension, développements limités*** ☜

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 20 — Espaces vectoriels —

Révisions des programmes précédents.

— Chapitre 21 — Espaces vectoriels de dimension finie —

1 Dimension d'un espace vectoriel

1.1 Espace vectoriel de dimension finie

1.2 Existence d'une base en dimension finie

1.3 Dimension d'un espace vectoriel

1.4 Conséquences sur les familles de vecteurs, caractérisation des bases. Application au cas de la dimension infinie. Caractérisation des bases parmi les familles de bon cardinal

1.5 Rang d'une famille

2 Sous-espaces vectoriels et dimension

2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel, s.e.v. de dimension maximale, base adaptée à un s.e.v., existence d'un supplémentaire

2.2 Dimension d'une somme, formule de Grassmann, corollaire sur une CNS de somme directe par la dimension de la somme, base adaptée à une somme directe

2.3 Supplémentaires en dimension finie, application aux hyperplans

— Chapitre 22 — Développements limités —

1 Développement limité de f au voisinage de a

1.1 Définition et premières propriétés : unicité, partie régulière, troncature

1.2 Primitivation d'un développement limité

1.3 Formule de Taylor-Young, DL usuels

1.4 Opérations entre développements limités : combinaisons linéaires, produit (analyse de l'ordre en fonction du rang du 1$^{\text{er}}$ coefficient non nul), composition, quotients

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 21. Montrer que E est de dimension infinie *ssi* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs E tels que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. Application pour montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie.
- Chapitre 21. Montrer que pour F,G s.e.v. de E, si la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E, alors $E = F \oplus G$.
- Chapitre 21. Formule de Grassmann.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**
  Exemples : montrer que $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ *pour tous* $x,y \in \mathbb{R}$*, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est* 2π*-périodique et savoir nier ces assertions.*

- **Trigonométrie.**
  Exemples : formule $\cos(2a)$*, résolution de* $\sin a = \sin b$*,* $\cos(2x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$*,* $\cos x = \sin x$*.*

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**
  Exemples : résoudre $x\,|x| \leqslant 3x+2$*, montrer que* $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x|$ *pour tous* $n \in \mathbb{N}$*,* $x \in \mathbb{R}$*, encadrer rapidement* $x \longmapsto \dfrac{\cos x + 2}{x^2+4}$ *sur* $[\,0\,;1\,]$*.*

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n-ièmes).
  Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$*, les racines carrées de* $3-4\mathrm{i}$*, linéarisation de* $\cos^3 x$*, résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$*.*

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  Exemples : donner la formule pour $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$*, calculer* $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} 2^k$*, écrire* $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ *avec des factorielles.*

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  Exemples : définir Arctan*, simplifier* $\mathrm{Arccos}(\cos(7))$*, théorème de dérivation de* $g \circ f$*, dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$*, donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$*, de* $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$*, de* $x \longmapsto \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$*, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de* $x \longmapsto \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$*.*

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**
  Exemples : $\displaystyle\int^{x} \cos t\, \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$*,* $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$*,* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$*.*

- **Équations différentielles.**
  Exemple : résoudre $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$*, expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$*.*

- **Limites de suites.**
  Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$*,* $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$*,* $\lim \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$*,* $\lim \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$*, adjacence des suites définies par* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ *et* $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$*, savoir démontrer que* $n!/n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- **Matrices.**
  Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, calcul de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$*, de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$*.*

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.
  Exemples : dérivée n*-ième de* $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$*,* $|\mathrm{Arctan}\, x - \mathrm{Arctan}\, y| \leqslant |x-y|$ *pour tous* x,y*,* $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ *pour tout* $x > 0$*.*

- **Espaces vectoriels** : montrer rapidement que des ensembles sont des s.e.v. et en donner une base, en particulier pour l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, de droites, plans ou d'intersections de tels ensembles dans $\mathbb{K}^n$, des s.e.v de polynômes, etc.
  Exemples : $\left\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$*,* $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\right\}$*,* $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$*,* $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$
  $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+z-t = 0 \quad \text{et} \quad 2x+4y+z+3t = 0\right\}$*.*