

Problème 1

Q1) Pour un gaz $\Delta U = C_V \Delta T \Rightarrow \Delta U = C_V (T_B - T_A)$

Q2) $W_{BC} = - \int_{V_B}^{V_C} P_{ext} dV$ ici les transformations sont réversibles donc $p = p_{int}$

de plus la transformation $B \rightarrow C$ est isotherme et le système est un gaz parfait (G.P)
on a donc $PV = nRT_C = \text{cte} \Rightarrow W_{BC} = - \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT_C}{V} dV = -nRT_C \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V}$

$W_{BC} = -nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$ or $V_B = V_A \Rightarrow W_{BC} = -nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)$

Q3) $V_C = \Delta V + V_A$ $P_A = P_C$ $T_C = T_A + \Delta T$
et $P_A V_A = nRT_A \Rightarrow nR = \frac{P_A V_A}{T_A} \Rightarrow W_{BC} = - \frac{P_A V_A (T_A + \Delta T)}{T_A} \ln\left(\frac{\Delta V + V_A}{V_A}\right)$

Q4) D'après le 1^{er} principe appliqué à la transformation $B \rightarrow C$
 $\Delta U_{BC} + \Delta \overset{\substack{\text{système} \\ \text{macroscopiquement} \\ \text{au repos}}}{A}_{BC} = W_{BC} + Q_{BC} \Rightarrow$ Transformation isotherme $\Rightarrow T_B = T_C$
 $\Rightarrow \Delta U_{BC} = C_V \Delta T_{BC} = C_V (T_C - T_B) = 0$

donc $W_{BC} = -Q_{BC}$ $Q_{BC} = nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)$

Q5) 1^{er} principe $\Delta H = W_{CA} (\text{autre que pression}) + Q_{CA}$
(écrit avec H car $C \rightarrow A$ est isobare) or $\Delta H_{C \rightarrow A} = C_P \Delta T_{C \rightarrow A} = C_P (T_A - T_C) = -C_P \Delta T \Rightarrow Q_{CA} = -C_P \Delta T$
pour un gaz

Q6) $\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}}$ or $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$

et $W_{\text{cycle}} = W_{BC} + W_{CA}$ $Q_{\text{cycle}} = Q_{BC} + Q_{CA} + Q_{AB}$

donc $W_{BC} + W_{CA} + Q_{BC} + Q_{CA} + Q_{AB} = 0$

$Q_{BC} = -W_{BC}$

$W_{CA} + Q_{CA} + Q_{AB} = 0$ or $Q_{CA} = -C_P \Delta T$ et pour $A \rightarrow B$ isochore $\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB}$
 $C_V (T_B - T_A) = Q_{AB}$

enfin pour une transformation isobare à p_A ($dC \rightarrow A$)

$$W_{CA} = - \int_{V_C}^{V_A} p_A dV \underset{\substack{\uparrow \\ p_A \text{ indep de } V}}{=} - p_A (V_A - V_C) = p_A \Delta V$$

finalement $p_A \Delta V - C_p \Delta T + C_v (T_B - T_A) = 0$

or $T_B = T_C$

$$\boxed{(C_p - C_v) \Delta T = p_A \Delta V}$$

Problème 2

Q1) On utilise la loi des gaz parfait $P_i V_c = n R T_i \Rightarrow \boxed{P_i = \frac{n R T_i}{V_c}}$

A.N

$$P_i = \frac{10^2 \times 8,314 \times 3000}{10 \times 10^{-3}}$$

$$P_i = 2,50 \times 10^3 \text{ Pa} \\ = 2,50 \times 10^3 \text{ bar}$$

On remarque que $P_i > P_{atm}$!

Q2) on applique le Théorème de l'énergie cinétique au projectile entre $t_i=0$ et t_f :

$$\Delta E_c = \sum_{i \rightarrow f} W(\vec{F}) \quad \text{ici seulement les forces présentes sont considérées}$$

donc $\sum_{i \rightarrow f} W(\vec{F}) = W_{ptot}$ et $\Delta E_c = \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} M v_i^2$

O projectile initialement au repos

donc $\frac{1}{2} M v^2 = W_{ptot} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2 W_{ptot}}{M}}}$

Q3)



$\vec{e}_x$
 P_{atm}

$$\vec{F}_{p,a} = P_{atm} S \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{p,a} = -P_{atm} \pi a^2 \vec{e}_x}$$

Pression uniforme P_{atm} sur une surface plane

Q4) $W_{pa} = \int_{x(t=0)+h}^{x(t_f)=L} \vec{F}_{p,a} \cdot d\vec{x} \vec{e}_x = -P_{atm} \pi a^2 \int_{x_0=0+h}^L dx \Rightarrow \boxed{W_{pa} = -P_{atm} \pi a^2 L}$

négligeable

$W_{pa} < 0$ car les forces présentes à l'avant sont résistantes

A.N $W_{pa} = -94 \text{ kJ}$

Q5) $W_{gaz} = - \int_{V_i}^{V_f} P_{ext} dV = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = - n R T \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV$

↑
mécaniquement réversible

↑
isotherme + G.P
 $P = \frac{n R T}{V}$

$$W_{gaz} = - n R T \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad \text{or } V_i = V_c$$

$$V_f = V_c + \pi a^2 L$$

$$\boxed{W_{gaz} = - n R T \ln \left(1 + \frac{\pi a^2 L}{V_c} \right)}$$

Q6) A.N $v = 538 \text{ m/s}$ $> v_{\text{son}}$ (c'est possible)

Q7) D'après le deuxième principe $\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{\text{ECH}} + S_{\text{créé}}$
 si la transformation est réversible $\Rightarrow S_{\text{créé}} = 0$
 si la transformation est adiabatique $Q=0$ or $S_{\text{ECH}} = \int \frac{\delta Q}{T_{\text{externe}}} = 0 \Rightarrow \Delta S = 0$
 bien isentropique

Q8) Comme on étudie la transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, on peut utiliser la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = \text{cte} \quad \text{or} \quad P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cte}$$

entre l'état initial et l'état final :

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \Rightarrow T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1}$$

avec $V_i = V_c$
 $V_f = V_c + \pi a^2 l$

$$T_f = T_i \left(\frac{V_c}{V_c + \pi a^2 l} \right)^{\gamma-1}$$

Q9) 1^{er} principe :

$$\Delta U + \Delta E_{c,m} = W_{\text{gaz}} + Q \Rightarrow 0 \text{ transformation adiabatique}$$

$v_i = v_f = 0$
 (par le gaz!)

$$\Delta U = C_v \Delta T = C_v (T_f - T_i) \text{ Pour un gaz}$$

finalment $W_{\text{gaz}} = C_v (T_f - T_i)$

Q10) $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$

Q11) $W_{\text{gaz}} = \frac{nR}{\gamma-1} \left(T_i \left(\frac{V_c}{V_c + \pi a^2 l} \right)^{\gamma-1} - T_i \right)$

Q12) $v = \sqrt{\frac{-2W_{\text{gaz}}}{m}}$ avec $W_{\text{gaz}} = -4,4 \text{ MJ}$
 $V = 470 \text{ m/s}$ un peu plus faible

Q13) le PFD appliqué au projectile dans le référentiel terrestre supposé galiléen si le projectile est en chute libre s'écrit
 $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = V \cos \alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + V \sin \alpha \end{cases}$ (on primitive)
 $\vec{v} \cdot \vec{e}_z \text{ à } t=0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{e}_z \text{ à } t=0$

on primitive encore $\begin{cases} x(t) = V \cos \alpha t + x_0^0 \\ y = 0 \\ z(t) = -g \frac{t^2}{2} + V \sin \alpha t + z_0^0 \end{cases}$

$t = \frac{x}{V \cos \alpha} \Rightarrow z(x) = -g \frac{x^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$

la portée est telle que $x = L_{\max}$ si $z(L_{\max}) = 0$ et $\alpha = 45^\circ$
maximale
 $L_{\max} \tan \alpha = \frac{g L_{\max}^2}{2V^2 \cos^2 \alpha}$ avec $\tan(45^\circ) = 1$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$L_{\max} \neq 0 \Rightarrow 1 = \frac{g L_{\max}}{2V^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow \boxed{L_{\max} = \frac{V^2}{g}}$

Q14) A.N $L_{\max} = 22 \text{ km}$! c'est énorme mais possible! (on a négligé les frottements, la portée réelle est certainement plus faible)

Q15) $\frac{dS_m}{dV_m} = R \left(\frac{1}{V_m} \left(\ln \left(T \frac{1}{V_m - b} \right) \right) + \frac{1}{V_m - b} \right) = \frac{R}{V_m - b} = \frac{P}{T}$

Q16) $V_m = \frac{V}{n} \Rightarrow V = n V_m$

Q17) $\frac{P}{T} = \frac{R}{\frac{V}{n} - b} \Leftrightarrow \boxed{P \left(\frac{V - bn}{n} \right) = RT}$

Q18) si $b=0$ on a $\frac{PV}{n} = RT$ loi des G.P

À T, V, n fixés $P = \frac{nRT}{(V - bn)}$ si $b > 0$ $V - bn < V \Rightarrow P_{\text{gaz réel}} > P_{\text{gaz parfait}}$

Q19) Le travail reçu par le gaz est négatif (il fournit au projectile)
 on peut aussi supposer que $Q < 0$ car de l'énergie est transférée vers l'extérieur (qui est plus froid)
 sous forme de chaleur

il faut donc $K > 0$ pour avoir $W_{\text{gaz}} < 0$
 et $Q < 0$

Q20)

$$\vec{F}_{pc}(t) = P(t) S \vec{e}_x$$

on a $P_i \left(\frac{V_i}{n} - b \right)^q = P(t) \left(\frac{V(t)}{n} - b \right)^q$ avec $V_i = V_c$
 à $t=0 \rightarrow$ à l'instant t $V(t) = V_c + \pi a^2 X(t)$

$$P(t) = P_i \left(\frac{V_c - bn}{V_c + \pi a^2 X(t) - bn} \right)^q$$

Q21)

$\int W(\vec{F}_{pc}) = \vec{F}_{pc} \cdot d\vec{X} \vec{e}_x$ dépend du chemin suivi donc non pas conservative

Q22)

$$\Delta E_m = W_{\text{air}}(\vec{F}_{pc}) = \int_{X(t)=0}^{X(t)=l} \vec{F}_{pc}(t) \cdot d\vec{X} \vec{e}_x = \vec{F}_{pc} \cdot d\vec{X} \vec{e}_x$$

$$\Delta E_c + \Delta E_{\text{sp}}^{\text{negligible}} = P_i S (V_c - bn)^q \int_0^l \frac{dX}{(V_c - bn + \pi a^2 X(t))^q}$$

$$\frac{1}{2} M v^2 - 0^2 = P_i S (V_c - bn)^q \int_0^l \frac{dX}{(V_c - bn)^q \left(1 + \frac{\pi a^2 X(t)}{V_c - bn} \right)^q}$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = P_i S \frac{(V_c - b n)^q}{(V_c - b n)^q} \int_0^L \frac{dX}{\left(1 + \frac{\pi a^2 X}{V_c - b n}\right)^q}$$

une primitive de $(1 + dX)^{-q}$ est $(1 + dX)^{1-q} \times \frac{1}{d(1-q)}$ ici $d = \frac{\pi a^2}{V_c - b n}$

$$\frac{1}{2} M v^2 = P_i S \left[\frac{(V_c - b n)}{\pi a^2} \left(1 + \frac{\pi a^2 X}{V_c - b n} \right)^{1-q} \right]_0^L$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = P_i S (1-q) \left(\frac{V_c - b n}{\pi a^2} \right) \left(\left(1 + \frac{\pi a^2 L}{V_c - b n} \right)^{1-q} - (1+0)^{1-q} \right)$$

on pose $X_0 = \frac{V_c - b n}{\pi a^2}$ homogène

$$\frac{1}{2} M v^2 = P_i S (1-q) X_0 \left(\left(1 + \frac{L}{X_0} \right)^{1-q} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = P_i S (1-q) X_0 \left(\left(\frac{X_0 + L}{X_0} \right)^{1-q} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = P_i S (1-q) X_0 \left(\left(\frac{X_0}{X_0 + L} \right)^{q-1} - 1 \right)$$

Si on suppose $q > 1 \Rightarrow 1-q < 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{X_0}{X_0 + L} \right)^{q-1} < 1$$

on recrit

$$\text{donc } \frac{1}{2} M v^2 = P_i S \underbrace{(q-1)}_{>0} X_0 \underbrace{\left(1 - \left(\frac{X_0}{X_0 + L} \right)^{q-1} \right)}_{>0}$$

On peut prendre la racine carrée

$$v = \sqrt{\frac{2 P_i S (q-1) X_0}{M}} \sqrt{1 - \left(\frac{X_0}{l + X_0} \right)^{q-1}}$$

À $t=0$ $\frac{P_i}{T_i} = \frac{R}{\frac{V_i}{n} - b}$ avec $V_i = V_c$

$$\text{donc } P_i S = \frac{R T_i S}{\frac{V_c}{n} - b} = \frac{R T_i \pi a^2 n}{\frac{V_c - b n}{n}} = \frac{n R T_i}{X_0}$$

$$P_i S X_0 = n R T_i$$

et finalement (!) :

$$v = \underbrace{\sqrt{\frac{2 n R T_i (q-1)}{M}}}_{V_\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{X_0}{l + X_0} \right)^{q-1}}$$

$$X_0 = \frac{V_c - b n}{\pi a^2}$$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2 n R T_i (q-1)}{M}}$$