CHAP25 : CHAMP MAGNÉTIQUE ET FORCES DE LAPLACE

Objectifs :

- Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible, et l'emplacement des sources.
- Connaître l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant, une spire circulaire et une bobine longue.
- Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
- Décrire un dispositif permettant d'obtenir un champ quasi uniforme
- Connaître des ordres de grandeur de champs magnétiques.
- Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane.
- Établir l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire.
- Évaluer la puissance des forces de Laplace.
- Établir l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique de la spire rectangulaire.

I Champ magnétique

1.1 Définition et ordres de grandeur

Le champ magnétique est un champ vectoriel qui, à tout point M de l'espace, associe un vecteur $\vec{B}(M,t)$ le champ magnétique s'exprime en **Tesla (T).**

Rappels :

▪ Dimension d'un champ magnétique : $\overrightarrow{F_{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ donc $[B] = \frac{ML\,T^{-2}}{[q]L\,T^{-1}}$ or $[q] = IT$ donc $[B] = \frac{ML\,T^{-2}}{ITL\,T^{-1}}$ et donc : $[B] = M\,I^{-1}\,T^{-2}$

▪ Ordres de grandeurs : Champ magnétique terrestre : **$5\ 10^{-5}$ T** Aimant usuel : **0,1 T à 1 T**

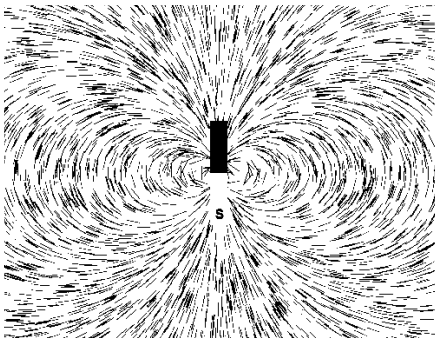
1.2 Cartes de champ

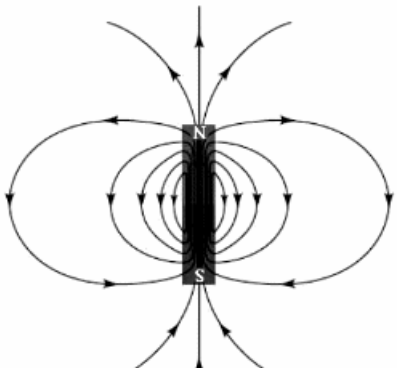
a.a Lignes de champ magnétique

Les lignes de champ magnétique sont des courbes qui sont en tout point tangente au vecteur $\vec{B}(M,t)$ On les représente sur des cartes de champ.

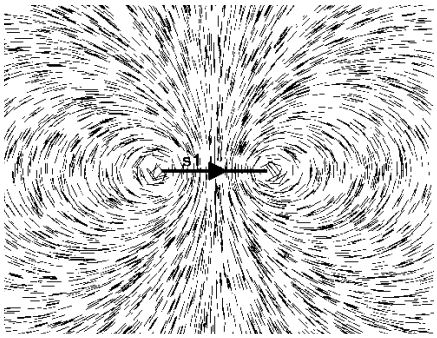
a.b Exemple de cartes de champ magnétique

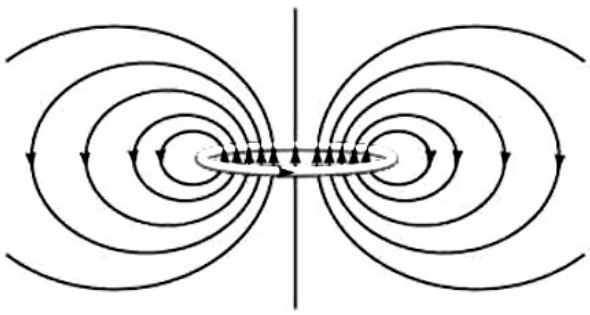
➔ Aimant



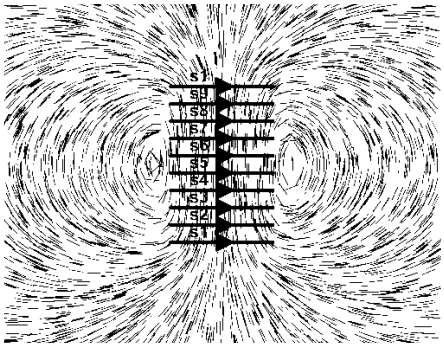


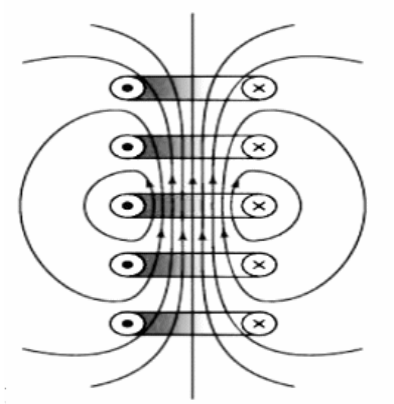
➔ Spire circulaire



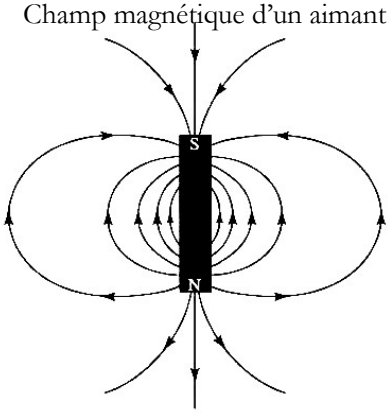


➔ Bobine longue

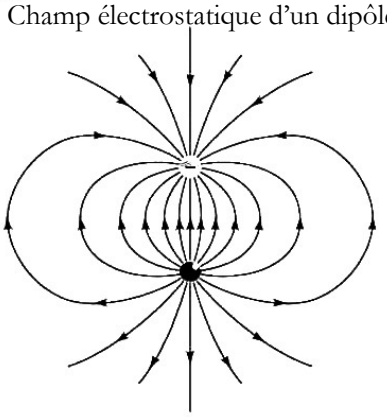




(a) Champ magnétique d'un aimant



(b) Champ électrostatique d'un dipôle



En comparant les figures a) et b), on constate que :

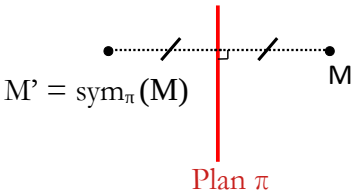
les lignes de champ électrostatique débutent et se terminent à des charges elle ne se referment pas

Par contre **lignes de champ magnétique forment des boucles fermées**.

a.c <u>Plan de symétrie et d'anti symétrie de la distribution des courants</u>

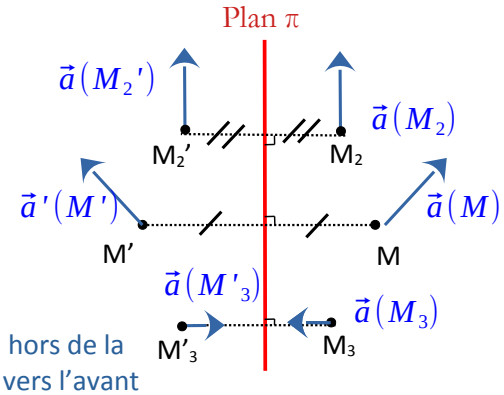
<u>Notation</u>

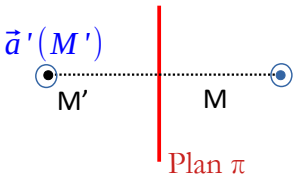
- Soit π un plan de symétrie : si M' est le point symétrique de M par rapport à π on note M' = sym_π(M)



- Soit deux point M et M' tels que M' = sym_π(M)

Si $\vec{a}'(M')$ est le vecteur en M' symétrique du vecteur $\vec{a}(M)$ en M par rapport au plan π, On note $\vec{a}'(M') = sym_\pi \vec{a}(M)$





si $\vec{a}(M)$ est dirigé hors de la feuille et vers l'avant

$\vec{a}(M')$ est aussi dirigé hors De la feuille est vers l'avant

Contre intuitif

<u>Plan de symétrie de la distribution de courant</u>

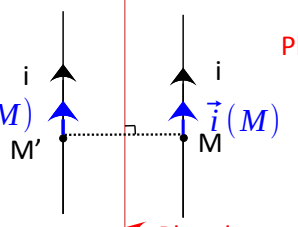
Si pour tout couple de point M et M' = sym_π (M) où passe des courants d'intensité respectives I et I',

on a $\vec{i}'(M') = sym\, \vec{i}(M)$ **$\vec{i}(M)$ étant le vecteur dirigé dans le sens et la direction de I**

<u>Alors le plan π est un plan de symétrie de la distribution des courants</u>

Exemples

2 fils rectilignes parcourus par la même intensité du courant

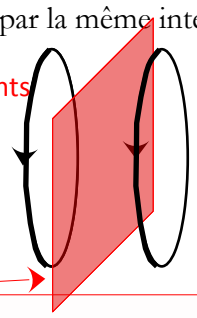


$\vec{i}\,'(M')=sym\,\vec{i}\,(M)$

ici $\vec{i}\,'(M')=\vec{i}\,(M)$

Cas particulier :

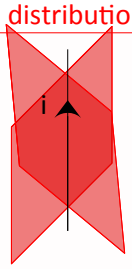
2 spires parallèles parcourues par la même intensité



Plan de symétrie de la distribution de courants

Plan de symétrie de la distribution de courants

le plan qui contient tous les fils est un plan de symétrie de la distribution de courant



Tous les plans contenant le fil en entier sont des plans de symétrie de la distrbution de courant

Plan d'anti-symétrie pour la distribution de courant

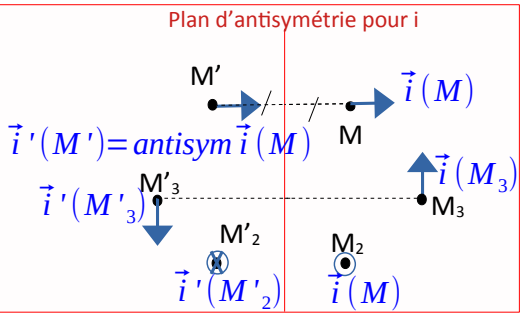
Si pour tout couple de point M et M' = symπ* (M)

où passe des courants d'intensité respective I et I',

on a $\vec{i}\,'(M')=$ ***anti sym*** $\vec{i}\,(M)$

$\vec{i}\,(M)$ **étant le vecteur dirigé dans le sens et la direction de I**

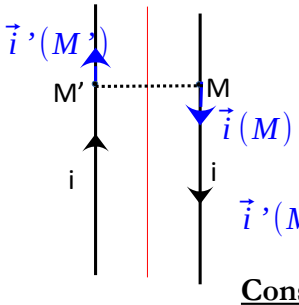
alors le plan π* est un plan d 'anti symétrie de la distribution des courants



Exemples

2 fils rectilignes parcourus par la même intensité du courant mais en sens opposé

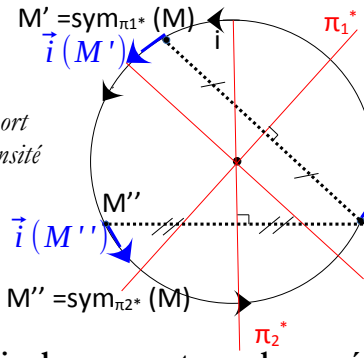
Plan d'antisymétrie pour la distribution des courants



Pour chaque couple de point (M,M') symétrique par rapport au plan rouge , le vecteur intensité du courant est antisymétrique

$\vec{i}\,'(M')=antisym\,\vec{i}\,(M)$

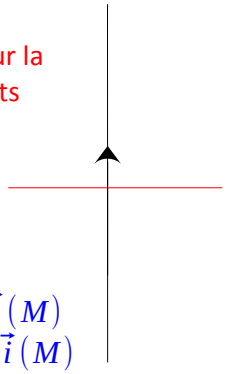
Une spire de courant circulaire (il y en a une infinité)



$\vec{i}\,(M')=antisym_{\pi 1*}\,\vec{i}\,(M)$

$\vec{i}\,(M'')=antisym_{\pi 2*}\,\vec{i}\,(M)$

Un fil infini

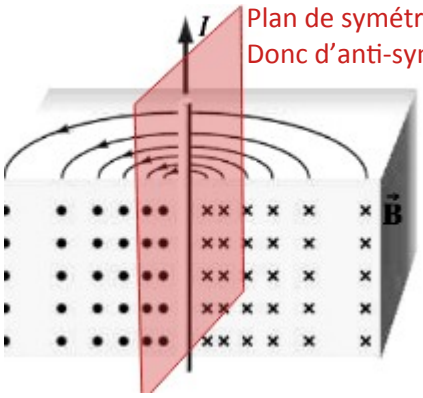


Conséquences de la symétrie des courants sur la symétrie du champ magnétique

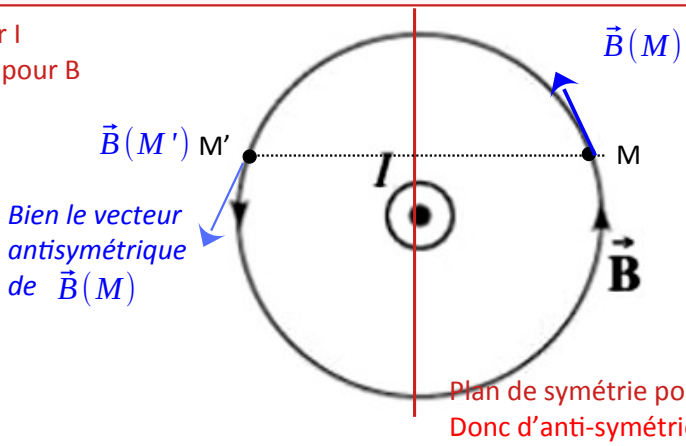
Résultat fondamental 1 à retenir :

Si la distribution des courants admet un plan de symétrie π alors c'est un plan d' antisymétrie pour le champ magnétique

Ainsi $\vec{B}(M')=-sym_{\pi}(\vec{B}(M))$ **pour tout couple de points M et M' tels que M' = symπ (M)**



Plan de symétrie pour I
Donc d'anti-symétrie pour B



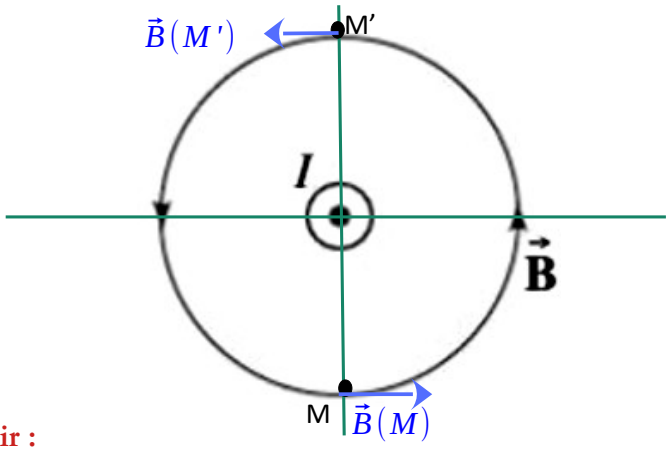
Bien le vecteur antisymétrique de $\vec{B}(M)$

Plan de symétrie pour I
Donc d'anti-symétrie pour B

Résultats fondamental 2 à retenir :

Si M appartient à un plan de symétrie pour la distribution des courants, le champ magnétique en ce point est forcement perpendiculaire à ce plan :

$M \in \pi \Rightarrow \vec{B}(M) \perp \pi$ **avec π plan de symétrie pour la distribution de courant**



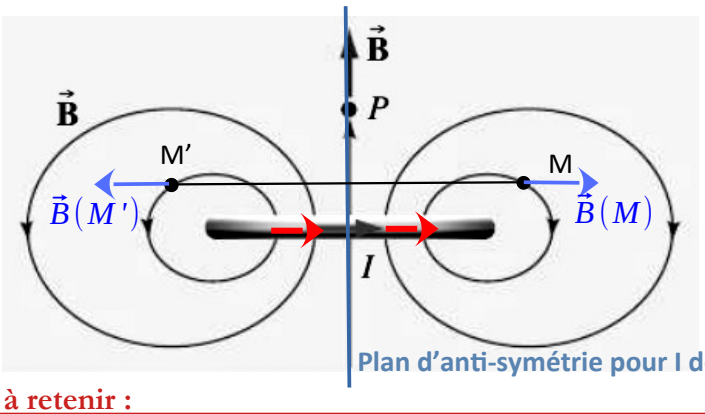
Pour le sens, règle de la main droite

Tous les plans qui contiennent le fil sont des plan de symétrie pour les courants

Résultat fondamental 3 à retenir :

Si la distribution des courants admet un plan d' antisymétrie π* , alors c'est un plan de symétrie pour le champ magnétique

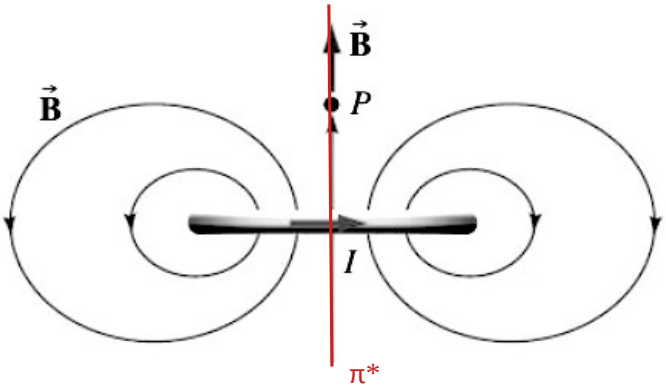
Ainsi $\vec{B}(M') = sym_{\pi}*(\vec{B}(M))$ **pour tout couple de points M et M' tels que M' = $sym_{\pi*}$(M)**



Résultats fondamental 4 à retenir :

Si M appartient à un plan d'antismétrie pour la distribution des courants, le champ magnétique en ce point est forcement contenu dans ce plan :

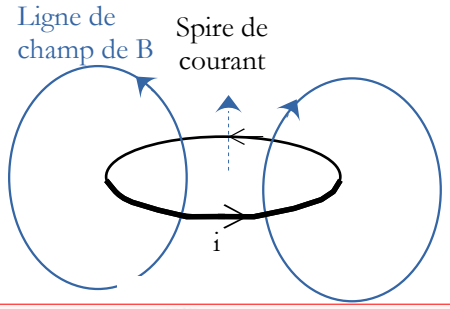
$M \in \pi * \Rightarrow \vec{B}(M) \in \pi *$ **avec π* plan d'antisymétrie pour la distribution des courants**

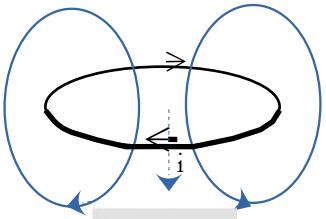


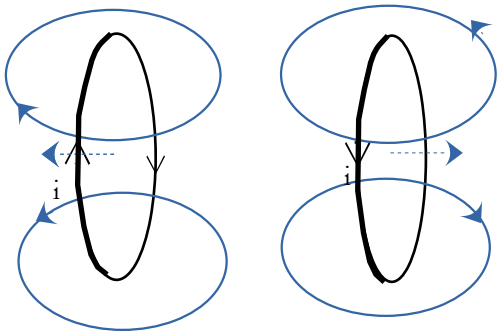
P est dans le plan d'antisymétrie de la distrbution de courant , le champ magnétique en P est donc contenu dans ce plan , on trouve la direction avec la règle de la main droite

a.d Propriétés des lignes de champ magnétique

- Pour les aimants, les lignes de champ entrent par le pôle **Sud** et sortent par le pôle **Nord**
- Plus les lignes de champ sont resserrées plus le champ B est **intense (la norme de $\vec{B}$ est importante)**
- Dans un champ uniforme, les lignes de champ sont **des droites parallèles** .
- Pour les champs magnétiques créés par des courants électriques, le sens de l'intensité du courant donne le sens des lignes de champ (et donc de $\vec{B}$) grâce à la règle de la main droite dite du « tire-bouchon » :







Règle de la main droite

Sens de $\vec{B}$ selon le pouce de la main droite

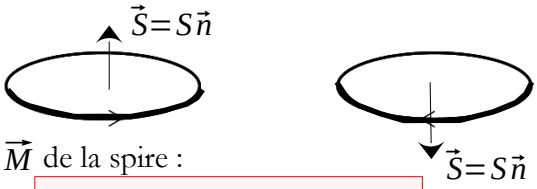
Sens de I selon l'index

(on peut aussi faire l'inverse)

1.3 Notion de moment magnétique

a Définition pour une boucle de courant plane

Soit une spire parcourue par un courant d'intensité i. Soit $\vec{S}=S\vec{n}$ le vecteur surface associé à cette spire telle que $\|\vec{S}\|=$ surface de l'intérieur de la spire et $\vec{n}$ le vecteur unitaire orienté en utilisant la règle de la main droite dite du « tire-bouchon ».



Alors, on appelle moment magnétique $\vec{M}$ de la spire :

$$\vec{M}=I\vec{S}=I\,S\vec{n}$$

Remarques :

- [M] = I L^2 (unité SI : A m^2).

b Définition pour un aimant permanent.

Pour un aimant permanent on donne plutôt l'aimantation qui est le moment magnétique volumique :

$$\mu_m=\frac{\|\vec{M}\|}{V}$$

Matériau	Aimantation ($kA \cdot m^{-1}$)
AlNiCo 200	600
Ferrite 1000	1700
NdFeB	2000 à 4000
SmCo 5	2000 à 3000
SmCo 17	3500 à 5000

Q1 Calculer la norme du moment magnétique d'un aimant Néodyme,fer,bore de 5 mm de haut pour un rayon de 5 mm (prendre 3000 kA .m^{-1})

$$\|\vec{M}\|=\mu_M V=\mu_M \pi R^2\times R=3000\,10^3\times\pi\times(5\,10^{-3})^3=1{,}17\,Am^2$$

Q2 Calculer ensuite l'intensité du courant qui faudrait faire passer dans une spire de même rayon pour obtenir le même moment magnétique

$$\|\vec{M}\|=I\times S\Leftrightarrow I=\frac{\|\vec{M}\|}{\pi R^2}$$ très grand !

II « Champ, courant, mouvement »

2.1 Mise en évidence expérimentale

- Un peu d'histoire :

1800 : invention de la pile, source de courant continu, par Volta. Mais peu efficace et encombrant…

1820 : Oersted découvre par hasard qu'un fil électrique alimenté fait bouger l'aiguille aimanté d'une boussole. On découvre alors que « courant » → « champ ».

Années 1830 : Faraday, lorsqu'il entend que « courant » → « champ », se demande alors pourquoi « champ » ne pourrait pas impliquer « courant » ?

- **« CHAMP, COURANT, MOUVEMENT » :**

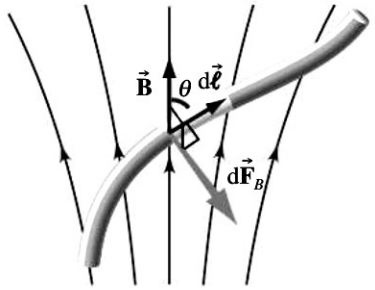
si deux de ces mots sont en présence, alors le troisième est induit, c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

- Expérience de la dynamo : champ + mouvement = courant.
- Expérience du moteur à courant continu : champ + courant = mouvement.

2.2 Force de Laplace

a Force élémentaire de Laplace

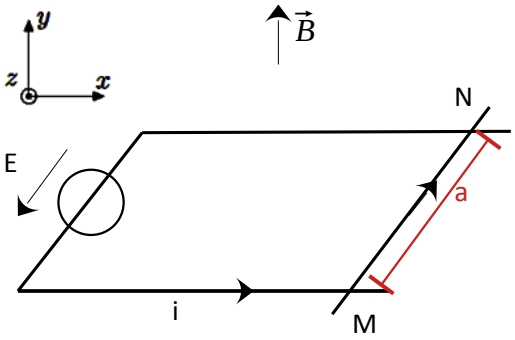
sur un élément de fil de longueur dl parcouru par un courant d'intensité i, le champ $\vec{B}$ est à l'origine **d'une force élémentaire** appelée force de Laplace élémentaire telle que :



$$d\vec{F}_L = i\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

C'est le sens de i qui donne le sens du déplacement élementaire

a Expression de la force de Laplace pour une tige en translation



$$\vec{F}_L = \int_M^N i\,d\vec{l} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \vec{F}_L = \int_M^N i(-dl\,\vec{e}_z) \wedge B\,\vec{e}_y$$

$$\vec{F}_L = -\int_M^N i\,B\,dl\,\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{F}_L = -i\,B\int_M^N dl\,\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y \Leftrightarrow F_L = -i\,B\int_M^N dl\,(-\vec{e}_x)$$

$$\vec{F}_L = i\,B\int_M^N dl\,\vec{e}_x = i\,B\,MN\,\vec{e}_x \Leftrightarrow \vec{F}_L = iBa\,\vec{e}_x$$

b Puissance de la force de Laplace

$$P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = +i\,B\,a\,\vec{e}_x \cdot v\,\vec{e}_x = i\,a\,Bv$$

Si la force de Laplace est motrice i>0
Sinon i<0

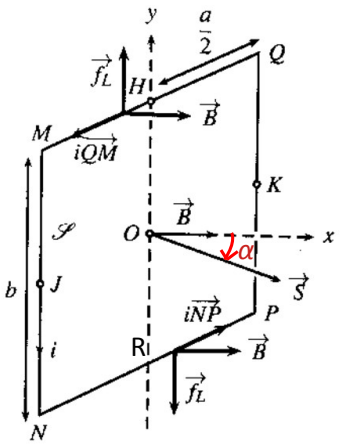
c Généralisation

De manière générale, pour un champ $\vec{B}$ **uniforme et permanent(stationnaire)** sur un tronçon **rectiligne** MN parcouru par un courant d'intensité **i allant de M vers N,** on a :

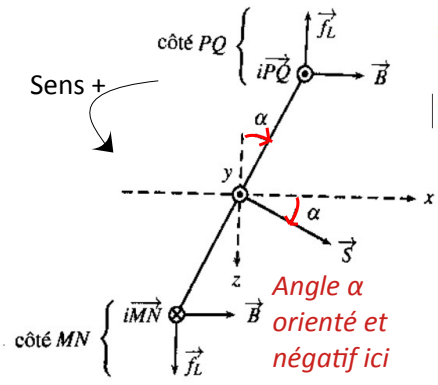
$$\vec{F}_L = i\,\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$$

2.3 Couple magnétique d'une spire rectangulaire

a Expression du couple



Vue de profil



Vue de dessus

On considère une spire rectangulaire de moment magnétique $\vec{M}$ plongée dans $\vec{B}=B_0\vec{e}_x$ uniforme et anent. On considère que la spire n'a qu'un seul de liberté (rotation autour de (Oy)).

Force de Laplace sur QM : $\overrightarrow{QM}=a(\cos\alpha\,\vec{e}_z+\sin\alpha\,\vec{e}_x)$

$$\vec{F}_{LMQ}=i\overrightarrow{QM}\wedge\vec{B}=iaB_0\cos(\alpha)\vec{e}_y$$

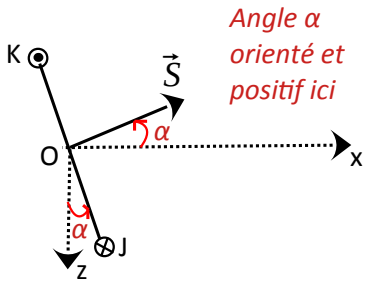
Force de Laplace sur MN:

$$\vec{F}_{LMN}=i\overrightarrow{MN}\wedge\vec{B}=i(-b\vec{e}_y)\wedge B_0\vec{e}_x=ibB_0\vec{e}_z$$

Force de Laplace sur NP :

$$\vec{F}_{LNP}=i\overrightarrow{NP}\wedge\vec{B}=-iaB_0\cos(\alpha)\vec{e}_y$$

Force de Laplace sur PQ : $\vec{F}_{LPQ}=i\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{B}=i(+b\vec{e}_y)\wedge B_0\vec{e}_x=-ibB_0\vec{e}_z$



Attention au signe de α

Moment magnétique de la spire : $\vec{M}=i\vec{S}=Iab(\cos\alpha\,\vec{e}_x-\sin\alpha\,\vec{e}_z)$

Expression du couple des forces de Laplace en O en supposant que chaque force de Laplace s'applique au milieu de du segment de spire correspondant (c'est bien un couple car la résultante des forces de Laplace est nulle)

$$\vec{\Gamma}_L=\vec{OH}\wedge\vec{F}_{LQM}+\vec{OJ}\wedge\vec{F}_{LMN}+\vec{OR}\wedge\vec{F}_{LNP}+\vec{OK}\wedge\vec{F}_{LPQ}$$

$$\vec{\Gamma}_L=\frac{b}{2}\vec{e}_y\wedge iaB_0\cos(\alpha)\vec{e}_y+\vec{OJ}\wedge ibB_0\vec{e}_z+\frac{-b}{2}\vec{e}_y\wedge(-iaB_0\cos(\alpha)\vec{e}_y)+\vec{OK}\wedge(-ibB_0\vec{e}_z)$$

Nul car vecteurs colinéaires

$\vec{OJ}=\frac{a}{2}(\cos\alpha\,\vec{e}_z+\sin\alpha\,\vec{e}_x)$ et $\vec{OK}=\frac{a}{2}(-\cos\alpha\,\vec{e}_z-\sin\alpha\,\vec{e}_x)$ et finalement

$\vec{\Gamma}_L=\frac{a}{2}(-\cos\alpha\,\vec{e}_z+\sin\alpha\,\vec{e}_x)\wedge ibB_0\vec{e}_z+\frac{a}{2}(-\cos\alpha\,\vec{e}_z-\sin\alpha\,\vec{e}_x)\wedge(-ibB_0\vec{e}_z)$ soit $\vec{\Gamma}_L=-aibB_0\sin(\alpha)\vec{e}_y$

On remarque que $\vec{M}\wedge\vec{B}=Iab(\cos\alpha\,\vec{e}_x-\sin\alpha\,\vec{e}_z)\wedge B_0\vec{e}_x=-iabB_0\sin(\alpha)\vec{e}_y$

À retenir et à savoir démontrer :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_L=\vec{M}\wedge\vec{B}}$$

b Puissance du couple

$$\boxed{P(\Gamma_\Delta)=\Gamma_\Delta\omega \qquad \Gamma_\Delta=\vec{\Gamma}_L\cdot\vec{u}_\Delta}$$

avec ω la vitesse de rotation de l'objet autour de l'axe de rotation Δ

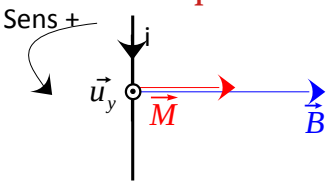
c Conséquence : position d'équilibre d'un aimant (ou d'une spire de courant) dans un champ $\vec{B}$

Le TMC à l'équilibre impose que les moments se compensent sur le système {aimant }

→ comme le poids s'applique en G sur l'axe de rotation, son moment est nul par rapport à l'axe de rotation
→ on suppose la liaison parfaite don son moment en O
→ A l'équilibre on a donc $\vec{\Gamma}_L = \vec{0}$.
Or, $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}$ donc, à l'équilibre, $\vec{M}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires (même sens ou opposé)pour assurer la nullité du produit vectoriel

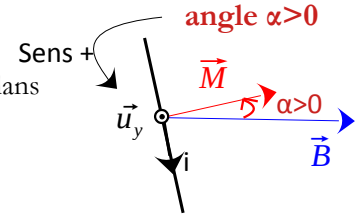
➔ **L'aiguille d'une boussole s'aligne toujours sur les lignes de champ. Magnétique extérieur**

Stabilité : on part d'un équilibre



Avec $\vec{M}$ et $\vec{B}$ dans le même sens

on tourne légèrement la spire d'un angle α>0

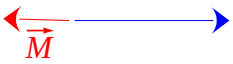


$$\vec{\Gamma}_L = -a\,i\,b\,B_0 \sin(\alpha)\,\vec{e}_y$$

$$\Gamma_{L\vec{u}_y} = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{u}_y = -a\,i\,b\,B_0 \sin(\alpha) < 0$$

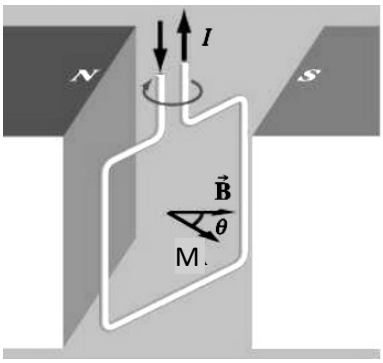
Le couple scalaire autour de (Oz) étant négatif il fait tourner la spire dans **le sens de diminution de α :** retour à l'équilibre → équilibre stable

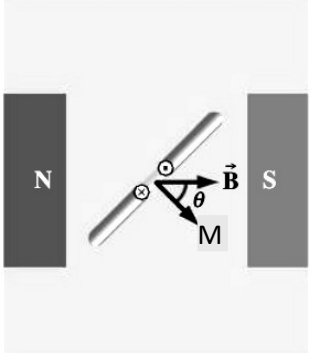
Si $\vec{M}$ et $\vec{B}$ en sens opposé



L'équilibre est instable car le couple fait tourner la spire dans le sens décroissant donc éloigne de l'équilibre initial

d Application : Moteur à courant continu





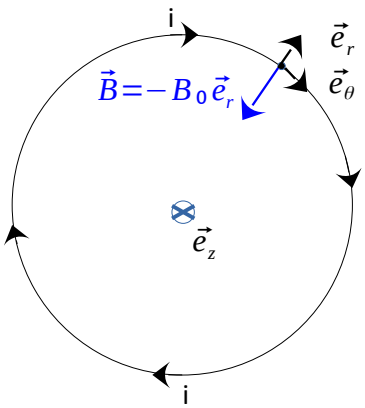
TMC sur l'axe vertical sans frottement ni charge :

$$J\ddot{\theta} = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{u}_\Delta = -a\,i\,b\,B_0 \sin(\theta)$$

Si petits angles :
oscillateurs harmonique mais ne peut pas faire de tour complets !

Pour que la spire ne fasse pas demi-tour, il faut changer le sens du courant de façon périodique
https://www.youtube.com/watch?v=A3b3Km5KVXs

Force de Laplace sur une spire de courant circulaire de rayon R avec un champ magnétique radial $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_r$ ($B_0 > 0$)



$$d\vec{F}_L = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow d\vec{F}_L = i\,dl\,\vec{e}_\theta \wedge -B_0 \vec{e}_r \Leftrightarrow d\vec{F}_L = i\,B_{dl}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{F}_L = \oint_{\text{tour de la spire}} d\vec{F}_L = \oint_{\text{un tour}} i\,dl\,B_0\,\vec{e}z$$

$$\vec{F}_L = i\,B_0\,\vec{e}_z \oint_{\text{tour de la spire}} dl \Leftrightarrow \vec{F}_L = i\,B_0\,2\pi R\,\vec{e}_z$$