

EXERCICE 1 : voir cours

EXERCICE 2

1. $[B]$? $\vec{F} = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B} \Rightarrow \text{MLT}^{-2} = \text{IL}[B]$

$\Rightarrow [B] = \text{MI}^{-1}\text{T}^{-2}$

2. $[\Phi]$? $\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow [\text{ML}^2\text{I}^{-1}\text{T}^{-2}] = [\Phi]$

3. $[B_0]$? $B = \mu_0 n i \Rightarrow [B_0] = \frac{\text{MI}^{-1}\text{T}^{-2}}{\text{L}^{-1}\text{I}}$

$\Rightarrow [B_0] = \text{MLI}^{-2}\text{T}^{-2}$

4. $[L]$? $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow [L] = \frac{\text{ML}^2\text{T}^{-2}}{\text{I}^2} = [\text{ML}^2\text{I}^{-2}\text{T}^{-2}]$

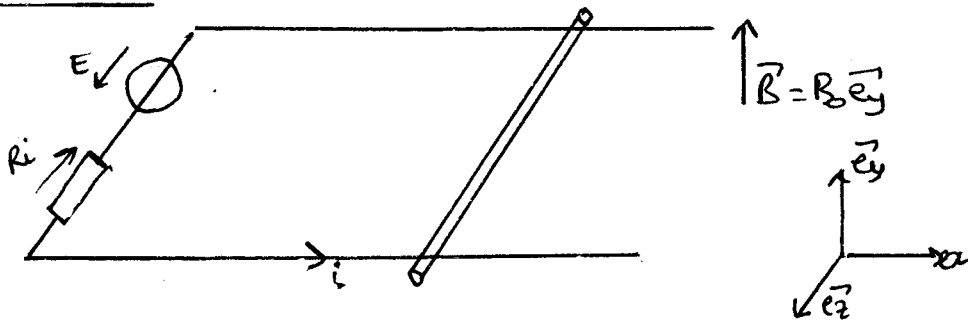
(on retrouve bien $[L] = [\frac{\Phi}{i}] = \text{ML}^2\text{I}^{-2}\text{T}^{-2}$).

de plus $[M] = [\frac{\Phi}{i}] = [L]$ donc $[M] = \text{ML}^2\text{I}^{-2}\text{T}^{-2}$

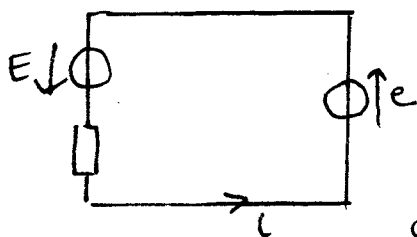
5. $[e]$? $e_{\text{xi}} = \mathcal{P}$ donc $[e] = [\frac{\mathcal{P}}{i}] = \frac{\text{ML}^2\text{T}^{-2}}{\text{T I}}$

$\Rightarrow [e] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}\text{I}^{-1}$

EXERCICE 3



1. Schéma électrique équivalent :



Loi des mailles :

$E + e = Ri$

or $e = - \frac{d\Phi}{dt} = - B_0 a v(t)$

donc

$[Ri(t) + B_0 a v(t) = E] \quad (1 \text{ elec})$

2. Système : {barre} Ref: TSG BDF: $\vec{P}$ et $\vec{r}$ se conservent.

$\vec{F}_L = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int i (-d\vec{l} \wedge B_0 \vec{e}_y)$
 $= i(t) a B_0 \vec{e}_x$

donc $\boxed{m \frac{dv}{dt} = i(t) a B_0} \quad (2me\dot{c}a)$

3. (1elec) $\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} - \frac{B_0 a}{R} v(t)$

dans (2me\dot{c}a):

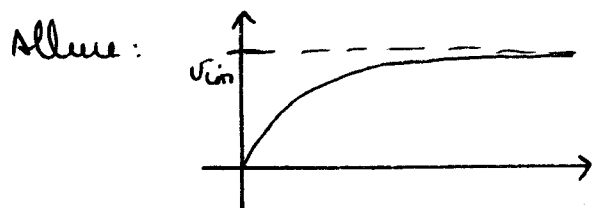
$$m \frac{dv}{dt} = \frac{E a B_0}{R} - \frac{(a B_0)^2}{R} v(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{(a B_0)^2}{m R} v(t) = \frac{E a B_0}{m R}$$

$$\Rightarrow v(t) = A \exp\left(-\frac{(a B_0)^2}{m R} t\right) + \frac{E}{a B_0}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{E}{a B_0} \left(1 - \exp\left(-\frac{(a B_0)^2}{m R} t\right)\right)}$$

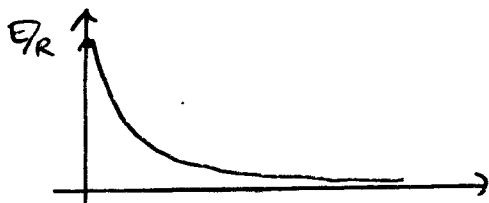
en utilisant l'exo 2, $\left[\frac{E}{a B_0}\right] = \frac{H \cdot L T^{-3} I^{-1}}{M I^{-1} T^{-2}} = L T^{-1} \rightarrow \text{ok}$



la vitesse tend vers v_{lim}
à cause de F_L (force de frottement).

on en déduit $i(t) = \frac{E}{R} - \frac{B_0 a}{R} \frac{E}{a B_0} \left(1 - \exp\left(-\frac{(a B_0)^2}{m R} t\right)\right)$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{(a B_0)^2}{m R} t\right)}$$



en l'infini $i \rightarrow 0$: les effets
(force de Laplace) se sont
totalement opposés aux
causes (le générateur
développant i)

Les courants induits annulent

TOTALEMENT les courants du générateur de tension.

4. RUSE. On multiplie (1elec) par i et (2me\dot{c}a) par v .

$$\Rightarrow \begin{cases} R i^2 + B_0 a v i = E i \\ m v \frac{dv}{dt} - B_0 a v i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R i^2 + m v \frac{dv}{dt} = E i$$

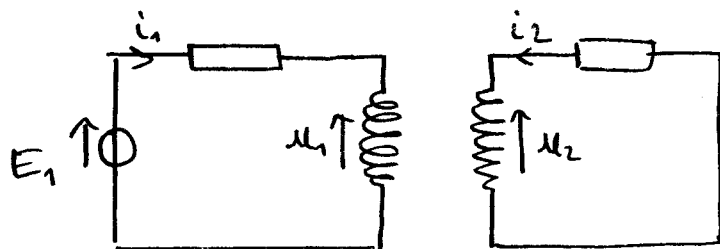
$$\Rightarrow \boxed{E i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + R i^2}$$

↑
puissance
du générateur

↑
puissance
cinétique

↑
puissance
dissipée par
effet Joule.

EXERCICE 4



$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{U}_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Loi des mailles :

$$\begin{cases} E_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & (1) \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & (2) \end{cases}$$

RUSE on multiplie (1) par i_1 et (2) par i_2 .

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 i_1 = R_1 i_1^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} & (1') \\ 0 = R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_2 \frac{di_1}{dt} & (2') \end{cases}$$

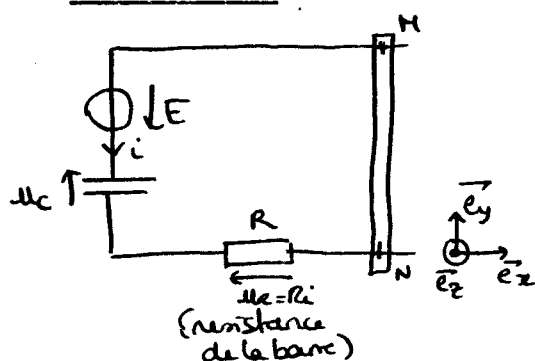
$$(1') + (2') \Rightarrow$$

$$E_1 i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + \underbrace{M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}}_{\frac{d}{dt} (M i_1 i_2)}$$

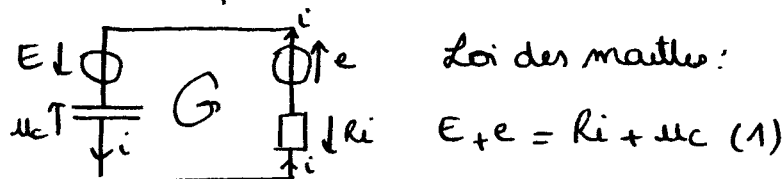
$$\Rightarrow \boxed{E_1 i_1 = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{puissance dissipée par effet Joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}_{\text{puissance magnétique}}}$$

(Note: The first term in the box is labeled 'puissance du GBF' in the original image)

EXERCICE 5



1. Circuit équivalent :



Loi des mailles :

$$E + e = Ri + \frac{1}{C} \int i dt \quad (1)$$

$$\text{or } i = C \frac{de}{dt} \text{ donc on derive (1)}$$

$$\text{on obtient : } \frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i \Rightarrow \frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i$$

$$\text{or } e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{e}_z \cdot S \vec{e}_z = - aB \frac{dw}{dt} \vec{e}_z \quad (\text{car } \vec{B} \text{ colinéaire à } \vec{S} \text{ avec le sens de } i \text{ choisi})$$

$$\Rightarrow \frac{de}{dt} = - aB \frac{dw}{dt}$$

donc

$$\boxed{- \frac{aB}{R} \frac{dw}{dt} = \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i(t)} \quad (1 \text{ elec})$$

2. Système: {Barre} Ref: TSG Bdf: $\vec{P}$ et $\vec{R}$ s'annulent
 et $\vec{F}_L = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int i dl \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = i a B \vec{e}_x$

alors $\boxed{m \frac{dv}{dt} = i(t) a B} \quad (2 \text{ m\u00e9ca})$

3. (1 elec) $\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = -\frac{aB}{R} \frac{dv}{dt}$

(2 m\u00e9ca) $\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = -\frac{aB}{R} \frac{aB}{m} i(t)$

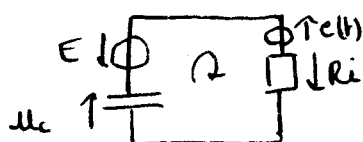
donc $\boxed{\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{(aB)^2}{mR} \right) i(t) = 0}$

on a bien $[RC] = T$ et $\left[\frac{mR}{(aB)^2} \right] = \left[\frac{m R i^2}{(a i B)^2} \right] = \frac{M M L T^{-2} T}{(M L T^{-2})^2} = T \rightarrow \text{ok!}$

4. On en d\u00e9duit:

$i(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{1}{\frac{1}{RC} + \frac{(aB)^2}{mR}}$

or u_C est continue aux bornes de C donc $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.
 loi des mailles \u00e0 $t = 0$.



$\underbrace{E(0^+)}_E + \underbrace{u_L(0^+)}_{= aBr(0^+) = 0} = \underbrace{u_C(0^+)}_{= 0} + R i(0^+)$

$\Rightarrow i(0^+) = \frac{E}{R} = i_0$

et donc

$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \text{ avec } \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{(aB)^2}{mR}$

5. $m \frac{dv}{dt} = i(t) a B \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{aB}{m} \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

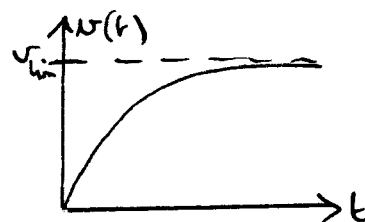
donc $v(t) = \int_{t=0}^t \frac{aBE}{mR} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \left[-\frac{aBE}{mR} \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^t$

$\Rightarrow v(t) = \frac{aBE}{mR} \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$

homog\u00e9n\u00e9it\u00e9: $\left[\frac{aBE\tau}{mR} \right] = \left[\frac{aB}{m} \times \tau \times \frac{E}{R} \right] = \frac{L M T^{-1} T^{-2} T I}{M} = L T^{-1} \rightarrow \text{ok!}$

$\Rightarrow$

$\boxed{v(t) = v_{\text{lim}} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))}$
 avec $v_{\text{lim}} = \frac{aBE}{mR} \times \frac{1}{\frac{1}{RC} + \frac{(aB)^2}{mR}}$



6: $P_{\text{géné}} = E i(t)$ donc

$$\mathcal{E}_g = \int_{t=0}^{t=\infty} E i(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_g = \left[-\frac{E^2 \tau}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{\infty} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_g = \frac{E^2 \tau}{R}}$$

homogénéité : $\left[\frac{E^2 \tau}{R} \right] = \left[\frac{E^2 I^2 \tau}{R I^2} \right] = \left[\frac{[\text{puissance}]^2 T}{[\text{puissance}]} \right] = [\text{énergie}]$.

7. $i(t) = C \frac{duc}{dt} = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ donc $\frac{duc}{dt} = \frac{E}{RC} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

$$\Rightarrow u_c(t) = \int_{t=0}^t \frac{E}{RC} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{E}{RC} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^t$$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = \frac{E \tau}{RC} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))}$$
 (homogène)
vérié car $u_c(0) = 0$.

8. $\mathcal{E}_c = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{E \tau}{RC} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))}_{u_c(t)} \underbrace{\left(\frac{E}{R} \exp(-\frac{t}{\tau}) \right)}_{i(t)} dt$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{E^2 \tau}{R^2 C} \int_0^{+\infty} (\exp(-\frac{t}{\tau}) - \exp(-\frac{2t}{\tau})) dt$$

$$= \frac{E^2 \tau}{R^2 C} \left(\left[-\tau \exp(-\frac{t}{\tau}) \right]_0^{\infty} - \left[-\frac{\tau}{2} \exp(-\frac{2t}{\tau}) \right]_0^{\infty} \right)$$

$$= \frac{E^2 \tau}{R^2 C} \left(\tau - \frac{\tau}{2} \right) \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_c = \frac{E^2 \tau^2}{2 R^2 C}}$$

Méthode plus rapide: $\mathcal{E}_c = \int u_c i dt = \int u_c \times C \frac{duc}{dt} dt = \int C u_c \frac{duc}{dt} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right) dt$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_c = \left[\frac{1}{2} C u_c^2 \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} C \left(\frac{E^2 \tau^2}{R^2 C^2} \right) !$$

9. $\mathcal{E}_g = \int_0^{\infty} R i^2 dt = \int_0^{+\infty} R \frac{E^2}{R^2} \exp(-\frac{2t}{\tau}) dt = \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} \exp(-\frac{2t}{\tau}) \right]_0^{\infty}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_g = \frac{E^2 \tau}{2 R}}$$

10. $W = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}(\vec{F}_L) dt$

$$\text{or } \vec{F}_L = i(t) a \vec{e}_2 = \frac{E a \beta}{R} \exp(-\frac{t}{\tau})$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{F}_L) = \underbrace{\frac{E a \beta}{R} \exp(-\frac{t}{\tau})}_{\vec{F}_L \cdot \vec{e}_2} \times \underbrace{N_{\text{aim}} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))}_{\vec{B} \cdot \vec{e}_2}$$

on peut faire le calcul direct ou...

Méthode rapide: $\vec{F}_L = i(t) a \vec{B} = \underbrace{m \frac{dv}{dt}}_{(2 \text{ méga})}$

et donc $\mathcal{P}(\vec{F}_L) = m \frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$

$$W = \int_0^{\infty} \mathcal{P}(\vec{F}_c) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 \right) dt$$

$$\Rightarrow W = \left[\frac{1}{2} m \omega^2 \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2} m \omega_{\text{lim}}^2 \text{ avec } \omega_{\text{lim}} = \frac{aBE_0}{mR}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \left(\frac{aBE_0}{mR} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{a^2 B^2 E^2}{2mR^2} \tau^2}$$

11. On doit avoir: $\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_J + \mathcal{E}_c + W$

soitification: $\mathcal{E}_G = \frac{E^2 \tau}{R}$

$$\text{et } \mathcal{E}_J + \mathcal{E}_c + W = \frac{E^2 \tau}{2R} + \underbrace{\frac{E^2 \tau^2}{2R^2 C} + \frac{(aB)^2 E^2}{2mR^2} \tau^2}_{\text{on doit trouver } \frac{E^2 \tau}{2R}}$$

$$\frac{E^2 \tau^2}{2R^2 C} + \frac{(aB)^2 E^2}{2mR^2} \tau^2 = \frac{E^2 \tau}{2R} \left(\frac{1}{RC} + \frac{(aB)^2}{mR} \right) \tau$$

1/τ! C'EST BEAU!!!

on a donc bien $\boxed{\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_J + \mathcal{E}_c + W}$

EXERCICE 6

1. a. $\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i \vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{L} i \vec{e}_z}$

2. b. $\varphi_{L_1} = L_1 i$ or $\varphi_{L_1} = \oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{L} i \text{ par une spire.}$

pour $\underline{N_1}$ spires, $\varphi_{P_{\text{TOT}}} = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} i \underbrace{\pi r_1^2}_{S_1} = \mu_0 \pi r_1^2 \frac{N_1^2}{L} i$
 L_1 par def de L_1 .

donc $\boxed{L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} \pi r_1^2}$

De même $\boxed{L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{L} \pi r_2^2}$ A.N. $L_2 = 4\pi \omega^{-7} \frac{(500)^2}{20 \cdot \omega^2} \pi (5 \cdot \omega^2)^2$

$\Rightarrow \underline{L_2 = 12 \text{ mH}}$ (valeur)

c. Par def. $\varphi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$

or $\varphi_{1 \rightarrow 2} = \oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2 = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = \mu_0 \frac{N_1}{L} i_1 S_2$
 1 spire

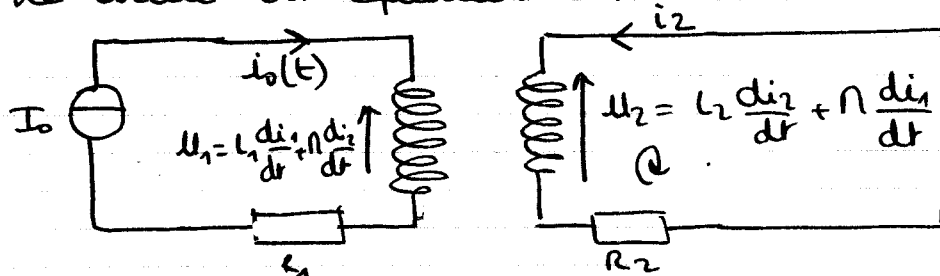
donc pour N_2 spires :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2 \text{ tot}} = \underbrace{\mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r_2^2}_{M} i_1 \Rightarrow \boxed{M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r_2^2}$$

2. On passe en complexes. $\underline{i}_0 = \underline{I}_0 \exp(j\omega t)$ $\underline{I}_0 = I_0 e^{j\varphi} = I_0 e^{j0}$.

$$\underline{i}_2 = i_2 \exp(j\omega t) \quad \underline{i}_2 = i_2 \exp(j\varphi)$$

Le circuit est équivalent à :



Loi des mailles : $0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_0}{dt} + R_2 i_2$

on passe en complexes :

$$0 = jL_2 \omega \underline{i}_2 + jM\omega \underline{i}_0 + R_2 \underline{i}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{i}_2 = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \underline{i}_0}$$

on simplifie : $\underline{i}_2 = -\frac{j \frac{M\omega}{R_2}}{1 + j \frac{L_2}{R_2} \omega} \underline{i}_0$ (longue)

on pose $\omega_c = \frac{R_2}{L_2}$ alors $\underline{i}_2 = -\frac{j \frac{M\omega}{R_2}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \underline{i}_0$

de plus $-\frac{M}{R_2} = -\frac{ML_2}{R_2 L_2} = -\frac{M}{\omega_c L_2}$ donc si on pose $K = -\frac{M}{L_2}$

on a

$$\boxed{\underline{i}_2 = -\frac{j \frac{K\omega}{\omega_c} \underline{i}_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \text{ avec } \omega_c = \frac{R_2}{L_2} \text{ et } K = -\frac{M}{L_2}}$$

$\underbrace{\omega_c = \frac{R_2}{L_2}}_{\text{dim T}^{-1}} \quad \underbrace{K = -\frac{M}{L_2}}_{\text{sans dim}}$

$$K = -\frac{M}{L_2} = -\frac{\mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r_2^2}{\mu_0 \frac{N_2^2}{L} \pi r_2^2} = -\frac{N_1}{N_2}$$

$$\boxed{K = -\frac{N_1}{N_2}}$$

b. $\underline{B}_2 = \mu_0 n_2 \underline{i}_2 + \mu_0 n_1 \underline{i}_0 = \frac{\mu_0}{L} (N_2 \underline{i}_2 + N_1 \underline{i}_0)$

$\Rightarrow \underline{B}_2 = \frac{\mu_0}{L} \left(N_1 - N_2 \frac{j \frac{K\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \right) \underline{i}_0$ ($\underline{B}_2$ tend à annuler $\underline{B}_1$!)

Soit $B_2 = \frac{\mu_0 N_1}{L} \left(1 - j \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \right) \underline{I_0} = \frac{\mu_0 N_1}{L} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \underline{I_0}$

à HF, $\omega \gg \omega_c$, $B_2 \approx \frac{\mu_0 N_1}{L} \left(1 - \frac{j}{j} \right) = 0$

Σ_2 réagit pour compenser parfaitement le champ créé initialement par $\Sigma_1 \rightarrow$ cohérent avec la loi de Lenz.

Pq $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow B_2 = B_1$ (Σ_2 non alimentée par induct en court-circuit).

c. $\omega_c = \frac{R_2}{L_2} = \frac{50}{12 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \omega_c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ rad. s}^{-1}$

$i_2 = |\underline{i_2}| = \frac{|\underline{K}| \frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} I_0$ A.N. $\frac{\frac{700}{500} \cdot \frac{2\pi \times 11 \cdot 10^3}{4,2 \cdot 10^3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{11 \cdot 10^3 \times 2\pi}{4,2 \cdot 10^3}\right)^2}}$

$\Rightarrow \underline{i_1} = 1,4 \text{ A (cohérent...)}$

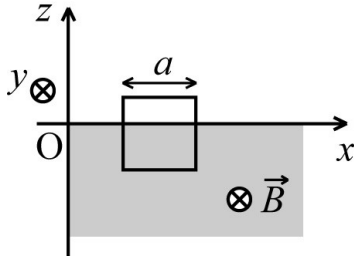
$B_2 = |\underline{B_2}| = \frac{\mu_0 N_1}{L} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \right) I_0$

A.N. $\underline{B_2} = 2,65 \cdot 10^{-4} \text{ T (cohérent)}$

et donc $\frac{B_1}{B_2} = \frac{\mu_0 N_1 I_0}{L B_2}$ A.N. $\frac{B_1}{B_2} = 16,6$

Exercice 7 : Freinage par induction d'une spire carrée

Q1



on choisie d'orienter $\vec{S}$ dans le même sens que vec B donc selon $\vec{e}_y$
 (le choix de l'orientation de vec S est arbitraire car i n'est pas indiqué)
 - $-a \leq z \leq 0$: on a $\vec{S}(t) = -z(t) a \vec{e}_y$
 comme z est négatif on a bien $\vec{S}$ selon $+\vec{e}_y$

D'après la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\vec{B} \cdot \vec{S}}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 \vec{e}_y \cdot (-z(t) a \vec{e}_y))$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(-B_0 \cdot z(t) a) = B_0 a \frac{dz}{dt} = \boxed{B_0 a v(t)}$$

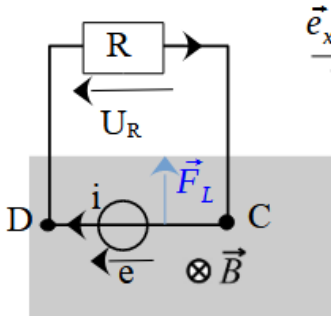
La spire est formée d'un fil de masse linéique μ (en kg.m^{-1}) et de résistance linéique λ (en $\Omega.\text{m}^{-1}$). Elle est lâchée sans vitesse initiale de la cote ($z_i = 0, z_s = a$). On pose $\tau = \frac{16\lambda\mu}{B_0^2}$. On s'intéresse au mouvement de la spire pour $-a \leq z \leq 0$.

Q2

La f-e-m est à l'origine d'un courant i (à orienter selon l'orientation de $\vec{S}$)

schéma électrique

La loi des mailles donne $e = U_R = R i$ avec $R = 4 a \lambda$



Le courant est aussi à l'origine d'une force de Laplace
 - les forces de Laplace sur les côtés verticaux se compensent et
 - Sur le côté horizontal supérieur le champ est nul (car $-a \leq z \leq 0$)
 il ne reste qu'à considérer la force de Laplace sur le côté du bas :

$$\vec{F}_L = i \vec{CD} \wedge \vec{B} = i a (-\vec{e}_x) \wedge B_0 \vec{e}_y = \boxed{-i a B_0 \vec{e}_z}$$

Bilan des actions mécaniques sur la spire : $\vec{F}_L$ et $\vec{P} = -m g \vec{e}_z$ avec $m = 4 a \mu$

On applique maintenant le PFD à la spire en projection sur l'axe (Oz) :

$$m \frac{dv}{dt} = -m g - i a B_0 \quad \text{or} \quad e = B_0 a v(t) = R i \Rightarrow i(t) = \frac{B_0 a v(t)}{R} \quad \text{soit} \quad 4 a \mu \frac{dv}{dt} = -4 a \mu g - \frac{B_0 a v(t)}{4 a \lambda} a B_0$$

sous forme canonique $\frac{dv}{dt} = -g - \frac{B_0 a v(t)}{4 a \lambda \times (4 a \mu)} a B_0$ donc $\boxed{\frac{dv}{dt} = -g - \frac{v(t)}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{16 \lambda \mu}{B_0^2}$

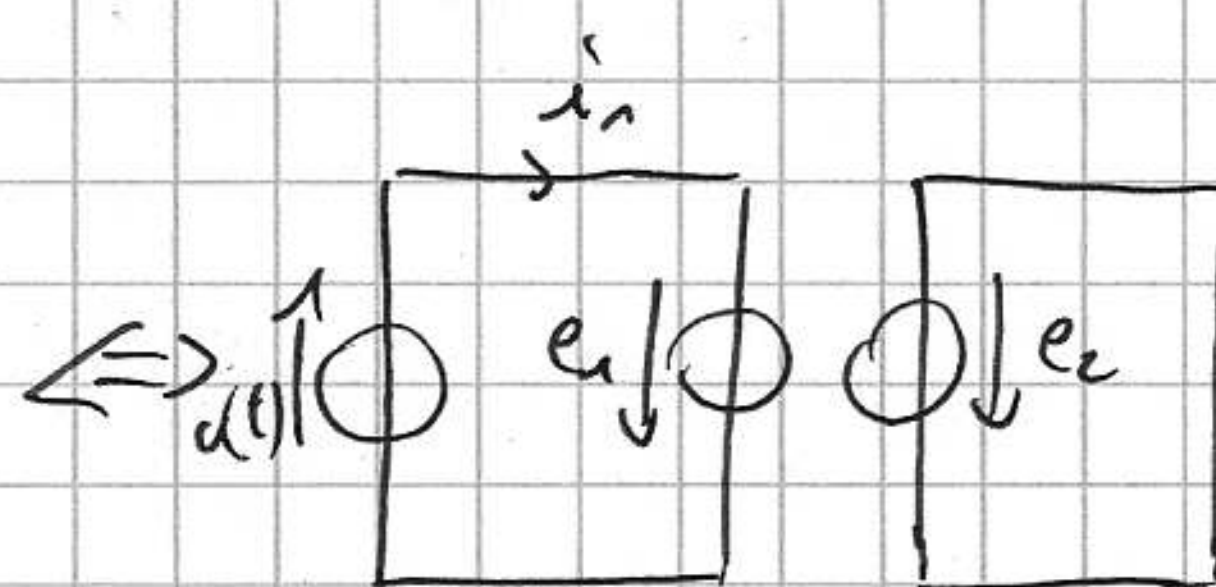
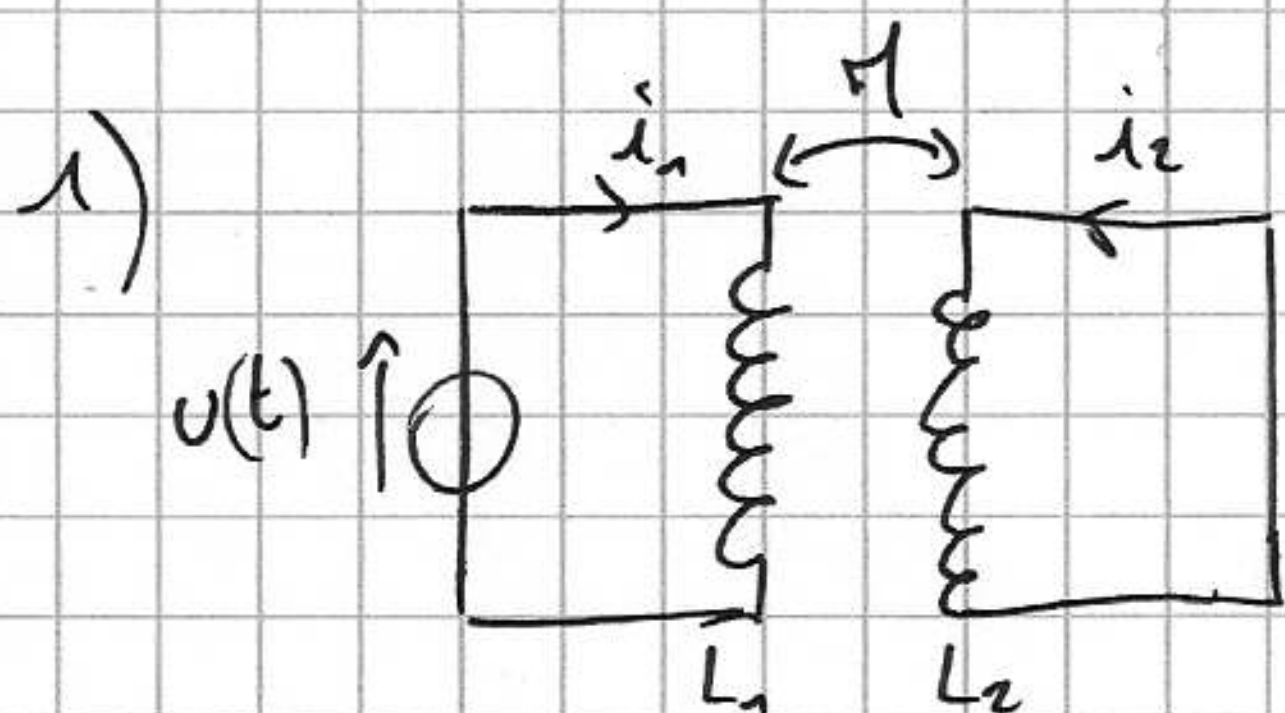
solution particulière : constante donc $0 = -g - \frac{v_p}{\tau} \Rightarrow \boxed{V_p = g \tau}$ (normal que ce soit négatif car z(t) diminue)

solution de l'équation homogène : $v_H(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ donc $v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} - g \tau$

C.I :

à $t=0$ $v(t=0) = 0 \rightarrow A e^0 - g \tau = 0 \rightarrow A = g \tau$ et finalement $\boxed{v(t) = g \tau (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)}$

Exercice 8 : couplage par inductance mutuelle



avec :

$$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

des mailles circuit 1 :

$$\begin{cases} u = -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

2) $\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}$ donc $u = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$

$= L_{eq} \frac{di_1}{dt}$

donc tout se passe comme si le générateur était branché sur une bobine d'inductance $L_{eq} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$

3) Passage en complexes du syst. d'équation obtenu au 1) :

$$\begin{cases} u = j\omega L_1 i_1 + j\omega M i_2 \\ 0 = j\omega L_2 i_2 + j\omega M i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1 \\ 0 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{u} = j \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \omega \underline{i_1}$ même résultat.

Exercice 9 : Principe de fonctionnement d'un générateur synchrone

[oral CCP]

1 Comme la distance entre la spire et l'aimant est bien plus grande que le rayon de la spire, on peut considérer le champ magnétique généré par l'aimant uniforme et vaut

$$\vec{B}_a(\theta) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

en étant très vigilant à la définition de l'angle θ servant à repérer la position de la spire, voir figure 6.

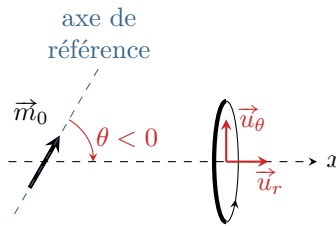


Figure 6 – Orientation relative de la spire par rapport à l'aimant. Comme dans l'expression du champ magnétique donné par l'énoncé, les coordonnées utilisées sont les coordonnées polaires de centre O et d'axe l'axe de l'aimant.

Compte tenu de l'orientation de la spire, spécifiée sur le schéma, le flux du champ magnétique au travers de la spire vaut

$$\phi = S \vec{B}_a \cdot \vec{u}_r = \pi a^2 \times \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} \times 2 \cos \theta = \frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} \cos \theta$$

et on en déduit la force électromotrice induite dans la spire

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} (-\dot{\theta} \sin \theta)$$

Si l'aimant tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe z , alors compte tenu du schéma on a $\theta = -\omega t$ (en supposant $\theta = 0$ à $t = 0$), donc $\dot{\theta} = -\omega$, et alors

$$e = +\frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} \omega \sin \omega t$$

Faites très attention aux multiples signes et compensations de signe ! Et vérifiez qualitativement le signe final : pour $t = 0$ l'aimant est dans l'axe de la spire, donc à $t \gtrsim 0$ il s'en éloigne, donc le flux au travers de la spire diminue, donc d'après la loi de Faraday $e > 0$. Ouf, c'est ce qu'on vient de trouver.

Le courant induit se détermine alors directement à partir de la loi d'Ohm, $i = e/R$, d'où

$$i = \frac{\mu_0 m_0 a^2 \omega}{2 x^3 R} \sin \omega t.$$

La spire étant simplement résistive, elle ne peut stocker d'énergie, et toute la puissance qu'elle reçoit est dissipée par effet Joule. Ainsi, la puissance électrique reçue par la spire $\mathcal{P}_e = Ri^2$ vaut

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 m_0 a^2 \omega}{2 x^3} \right)^2 \sin^2 \omega t.$$

2 Le champ créé par l'aimant n'exerce pas de couple sur l'aimant lui-même. On en déduit que le champ à l'origine de ce couple est donc le champ magnétique induit par la spire. L'énoncé donne le champ créé par un moment magnétique : il faut donc calculer le moment magnétique de la spire pour en déduire le champ qu'elle crée, en étant particulièrement vigilant au repérage. Compte tenu de l'orientation du courant sur la figure 6, le moment magnétique de la spire vaut

$$\vec{m}_{\text{sp}} = i \pi a^2 \vec{u}_x = \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2 x^3 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

En coordonnées polaires d'axe $\vec{u}_x$ et d'origine le centre de la spire (et donc pas O !), l'aimant a pour coordonnées $r = x$ et $\theta = \pi$, si bien que $\vec{u}_r = -\vec{u}_x$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_y$. On en déduit que le champ magnétique créé en O au niveau de l'aimant par la spire vaut

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0 m_{\text{sp}}}{4\pi x^3} [2 \cos \pi (-\vec{u}_x) + \sin \pi (-\vec{u}_y)]$$

soit

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi x^3} \times \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2 x^3 R} \sin \omega t \times 2 \vec{u}_x$$

et ainsi

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \omega}{4 x^6 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

Encore une fois, pensez à vérifier qualitativement les signes ! En connaissant le sens du courant induit d'après la question précédente ($i > 0$ pour $t \gtrsim 0$), on déduit de la règle de la main droite que $\vec{B}_{\text{sp}}$ doit être porté par $+\vec{u}_x$. Compte tenu du fait que les calculs ne sont pas très sympathiques, ces vérifications qualitatives font vraiment partie des compétences testées à l'oral du concours.

Finalement, le couple magnétique exercé par la spire sur l'aimant vaut

$$\vec{\Gamma} = \vec{m}_0 \wedge \vec{B}_{\text{sp}}(O)$$

Le plus sûr pour calculer le produit vectoriel est de décomposer les coordonnées de $\vec{m}_0$ sur la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y$. Comme l'aimant tourne à vitesse angulaire ω (supposée) positive autour de $\vec{u}_z$, alors

$$\vec{\Gamma} = m_0 [\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y] \wedge \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \omega}{4 x^6 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

ce qui conduit à

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \omega}{4 x^6 R} \sin^2 \omega t \vec{u}_z$$

On vérifie encore et toujours le signe : le couple est porté par $-\vec{u}_z$, c'est-à-dire qu'il résiste au mouvement de l'aimant. D'après la loi de Lenz, c'est complètement normal, puisque ce couple est d'origine inductive ... et que la cause de ce phénomène d'induction est le mouvement de l'aimant.

3 Pour maintenir la vitesse de rotation de l'aimant constante, le système mécanique doit fournir à l'aimant sous forme d'un couple une puissance exactement opposée à la puissance dissipée par $\vec{\Gamma}$. La puissance mécanique à fournir vaut donc $\mathcal{P}_m = -\Gamma \omega$, d'où

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \omega^2}{4 x^6 R} \sin^2 \omega t.$$

On remarque qu'on a $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_e$, c'est-à-dire que **toute la puissance mécanique fournie à l'aimant est transmise à la spire sous forme de puissance électrique** : on a bien modélisé un générateur électrique simplifié.

Exercice 10: Lévitation magnétique

Q1. Justifier les variables dont dépend le champ et sa direction.

Soit un point M sur l'axe (Oz) le plan (M, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_z$) est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant donc c'est un plan de symétrie pour le champ magnétique il est donc contenu dans ce plan → la composante selon $\vec{e}_\theta$ du champ est nulle

de même le plan (M, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$) est aussi un plan d'anti-symétrie pour la distribution de courant donc la composante selon $\vec{e}_r$ du champ est nulle

Le champ est donc dirigé selon $\vec{e}_z$

(attention ! En un point M qui n'est pas dans l'enroulement, comme la distribution n'est pas infinie le plan (M, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_r$) n'est pas un plan de symétrie pour la distribution de courant !

Pour les variables : la distribution de courant ne dépend pas de la variable θ donc le champ non plus

Q2 - En supposant que la composante B_z du champ est uniforme sur la section de la bobine (2) et prend partout la même valeur qu'en $r=0$, déterminer le coefficient d'induction mutuelle M entre les deux bobines.

Le flux de $\vec{B}$ au travers de la bobine (2) s'écrit : $\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{(2)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

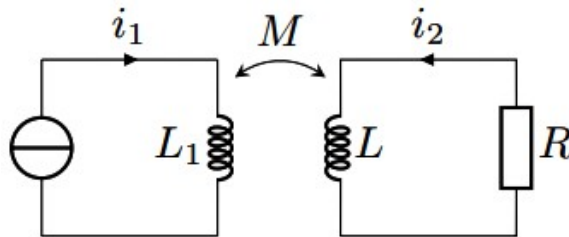
et comme on suppose le champ uniforme sur la section : $\phi_{1 \rightarrow 2} = \vec{B}(r=0, z) \cdot S \vec{e}_z = B(r=0, z, t) \pi b^2$

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = N \times \mu_0 n i_1(t) (1 - \cos \alpha) \times \pi b^2$$

et puisque par définition $\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$ on en déduit $M = \mu_0 n N \pi b^2 (1 - \cos \alpha)$.

Q3- La bobine (2) présente une résistance R et une inductance propre L. Montrer qu'il y apparaît un courant $i_2(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, pour lequel on déterminera l'amplitude I_m et $\cos \varphi$.

Le schéma électrique équivalent est représenté figure ci-contre



D'après la loi des mailles, $L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R i_2 = 0$

et comme on est en régime sinusoïdal établi on peut passer à la notation complexe :

$$jL\omega \underline{I_2} + jM\omega \underline{I_1} + R \underline{I_2} = 0$$

d'où on déduit $\underline{I_2} = -\frac{jM\omega}{R + jL\omega} \underline{I_1} = -\frac{jM\omega}{R + jL\omega} I_0$

On en déduit d'abord $I_m = |\underline{I_2}|$ donc $I_m = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} I_0$.

Pour trouver $\cos \varphi$ le plus simple est d'identifier la partie réelle sous la forme $\text{Re}(\underline{I_2}) = I_m \cos \varphi$

$$\underline{I_2} = -\frac{(jM\omega)(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2} I_0 = -\frac{ML\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} I_0 - j\frac{MR\omega}{R^2 + L^2\omega^2} I_0$$

si bien que

$$\cos \varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

Q4 - Calculer la force de Laplace qui s'exerce sur la spire (2), puis sa moyenne temporelle. L'exprimer en fonction notamment de I_m , I_0 et $\cos \varphi$.

La force de Laplace élémentaire subie par un tronçon de spire de la bobine (2) s'écrit

$$d\vec{F} = i_2 d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i_2 d\ell \vec{u}_\theta \wedge (B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z) = -i_2 d\ell B_r \vec{u}_z + i_2 d\ell B_z \vec{u}_r$$

En calculant la résultante sur la bobine, les composantes radiales en deux points diamétralement opposés se simplifier, seule demeure la composante verticale. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -i_2 B_r(b, z, t) \int_{(2)} d\ell \vec{u}_z \\ &= -i_2 B_r(bz, t) \times 2\pi N b \vec{u}_z \\ &= -2\pi N b I_m \cos(\omega t + \varphi) \times \frac{\mu_0 n b}{2a} I_0 \cos(\omega t) \sin^3 \alpha \vec{u}_z \\ &= -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_z \\ &= -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \times \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] \vec{u}_z \end{aligned}$$

comme $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0$:

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{2a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \cos \varphi \vec{u}_z,$$

Q5 - Justifier que la spire atteint une position d'équilibre, qu'il n'est pas demandé de déterminer. Étudier sa stabilité. (si on déplace la spire de la position d'équilibre et qu'on la lâche, est-ce qu'elle y retourne?)

On a montré question 2 que $\cos \varphi < 0$, on en déduit donc que la force moyenne $\langle \vec{F} \rangle$ est dirigée selon $+\vec{u}_z$, c'est à-dire vers le haut. Il existe donc une altitude z pour laquelle elle compense exactement le poids et qui correspond à la position d'équilibre de la bobine (2). Partant de la position d'équilibre, si la bobine (2) est déplacée vers le haut (z augmente) sous l'effet d'une perturbation alors $\tan \alpha$ et $\sin \alpha$ diminuent. La résultante du poids et de la force de Laplace devient donc dirigée vers le bas, ce qui ramène la spire à sa position d'équilibre : **cette position est donc stable.**

Q6 - Expliquer qualitativement comment le modèle à deux bobines permet d'expliquer la lévitation du plateau d'aluminium visible au Palais de la découverte. De quoi les spires de la bobine (2) seraient-elles l'analogie ?

Un champ magnétique variable est source de champ électrique. L'aluminium étant un conducteur électrique, ce champ électrique crée un courant $\vec{j}$ au sein du matériau : les spires de la bobine (2) modélisent les lignes de courant de $\vec{j}$ dans le plateau d'aluminium. En raisonnant en termes de densité volumique de force de Laplace, on en déduit que le plateau subit lui aussi une force moyenne verticale vers le haut qui présente des propriétés analogues à $\vec{F}$. Il y a donc bien une analogie qualitative entre les deux dispositifs.

Correction ex 11

Q1 $\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z$ d'où $\Phi = B_0 \cos(\omega t) \pi r_2^2$.

Q2 Loi de Faraday: $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ d'où $e = B_0 \pi r_2^2 \sin(\omega t)$.

Q3 Le circuit équivalent à (S) comporte la fém e en série avec une résistance R (l'inductance propre étant négligée) d'où $e = Ri$ soit $i(t) = \frac{B_0 \pi r_2^2 \omega}{R} \sin(\omega t)$.

Q4 La puissance instantanée dissipée par effet Joule dans la spire vaut $P(t) = Ri^2(t)$ soit:

$$P(t) = \frac{(B_0 \pi r_2^2 \omega)^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

Q5 La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la spire vaut $P_{moy} = \langle P(t) \rangle$. Or, la moyenne temporelle de $\sin^2(\omega t)$ vaut 1/2 d'où $P_{moy} = \frac{(B_0 \omega \pi r_2^2)^2}{2R}$.

Q6 L'énergie thermique transmise au fond de la casserole par effet Joule sera transmise au contenu de la casserole par conduction thermique. De la convection peut la diffuser ensuite au sein du contenu s'il est liquide.