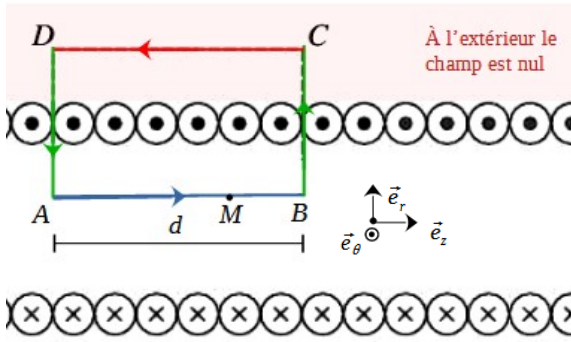


Correction DS3

Problème 1 Le dermographe, machine à tatouer électrique

Q 1.



Symétries :

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant, c'est donc un plan d'anti-symétrie pour le champ magnétique ainsi le champ magnétique est normal à ce plan

on en déduit que le champ magnétique est dirigé selon $\vec{e}_z$

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z$$

Invariances

la distribution des courants est invariante par rotation autour de (Oz)

On en déduit que le champ ne dépend pas de θ

la distribution des courants est invariante par translation selon (Oz) si le solénoïde est infini :

on en déduit $B(M) = B(r, z)$

$$\text{donc } \vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$$

Q 2

On applique le théorème d'Ampère sur le contour ABCD : $\oint_{M \in C} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$

En utilisant la relation de Chasles $\oint_{M \in C} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B}(r) \cdot d\vec{l}$

- Comme le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde $\int_C^D \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = 0$:

- Comme le champ est orthogonal à $d\vec{l}$ sur de B vers C et de D vers A : $\int_B^C \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = 0$ et $\int_D^A \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = 0$

- Entre A et B, comme le champ est colinéaire à $d\vec{l}$: $\int_A^B \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \int_A^B B(r) dl = B(r) \int_A^B dl = B(r) d$

Finalement : $\oint_{M \in C} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = B(r) d$

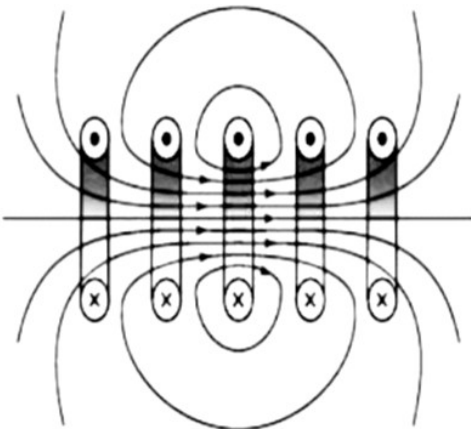
et $I_{\text{enlacés}} = (N \frac{d}{L}) I = n d I$ D'après le Th d'Ampère $\oint_{M \in C} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacés}} \Leftrightarrow B(r) d = \mu_0 n d I \Rightarrow B(r) = \mu_0 n I$

Finalement le champ magnétique ne dépend pas de r , il est uniforme dans le solénoïde et

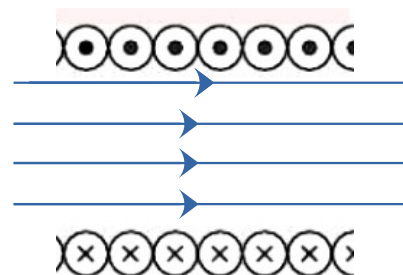
$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

Q 3.

Bobine finie



Solénoïde infini



Dans un solénoïde infini les lignes de champ sont parallèles entre-elles le champ est donc uniforme.

Pour une bobine finie, les lignes de champs sont plus espacées sur les bords de la bobine, le champ est donc plus intense au milieu de la bobine que sur les bords.

Q1

-l'intensité du courant est dans le même sens que la tension E

-Un courant circule dans la partie mobile

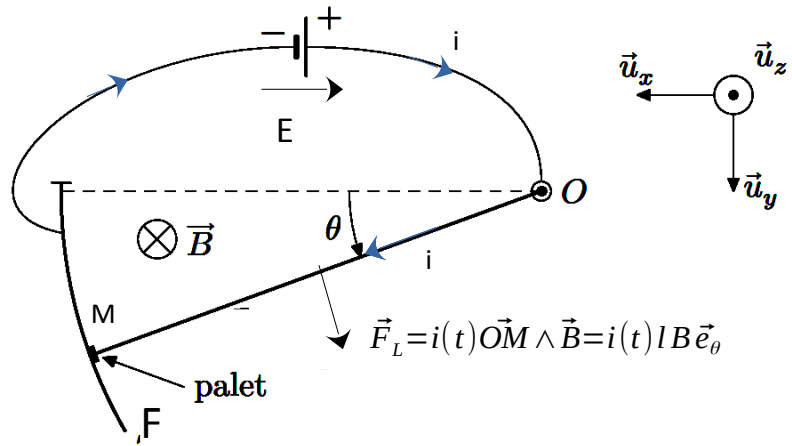
-Comme la partie mobile est dans une zone où règne un champ magnétique.

la partie mobile va subir une force de Laplace :

$$\vec{F}_L = i(t) \vec{OM} \wedge \vec{B} = i(t) l B \vec{e}_\theta$$

la force de Laplace est orthogonale

au vecteur $\vec{OM}$ et $\vec{B}$ elle est donc dirigée vers le bas



I.B.1) Situation initiale

Q 2.

Si le générateur n'est pas branché la force de Laplace n'exerce pas de moment sur la partie mobile et **le couple de rappel est le seul à s'exercer sur elle**. Si la partie mobile est au repos, alors le moment du couple de rappel est nul (si il est non nul la pièce ne serait pas au repos) ainsi $\vec{\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow -K \theta \vec{u}_z = \vec{0} \Rightarrow \theta = 0$

à l'équilibre on a donc $\theta = 0$: la partie mobile est droite

I.B.2) Mise sous tension (contact assuré)

Q3.

la partie mobile est soumise à deux moments :

- le couple de rappel : $\Gamma = -k \theta \vec{u}_z$

- le moment en O de la force de Laplace (qui s'exerce au milieu de la partie mobile noté C)

$$\vec{M}_O(\vec{F}_L) = \vec{OC} \wedge \vec{F}_L \text{ avec } \vec{OC} = \frac{l}{2} \vec{e}_r \text{ (car C est au milieu de la barre) donc : } \vec{M}_O(\vec{F}_L) = \frac{l}{2} \vec{e}_r \wedge i(t) B \vec{e}_\theta$$

soit $\vec{M}_O(\vec{F}_L) = i(t) \frac{l^2}{2} B \vec{u}_z$

Q4.

Le théorème du moment cinétique en O et en projection sur l'axe dirigé par $\vec{u}_z$ donne :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -K \theta \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z + i(t) \frac{l^2}{2} B \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z \Rightarrow J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -K \theta + i(t) \frac{l^2}{2} B \Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{K}{J} \theta(t) = \frac{i B l^2}{2 J}$$

On retrouve bien l'expression attendue avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

Q5.

- un moment a la dimension d'une force multipliée par une longueur)

- une force à la même dimension qu'une accélération multipliée par une masse

$$\text{Donc } [M_O(\vec{F}_L)] = [i(t) \frac{l^2}{2} B] = L \cdot M \cdot L \cdot T^{-2}$$

le moment d'inertie à la dimension d'une masse multiplié par une longueur au carrée

$$[J] = M \cdot L^2 \text{ donc } [A] = \left[\frac{i B l^2}{2 J} \right] = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}{M \cdot L^2} = T^{-2} \text{ c'est bien la même dimension que } [\ddot{\theta}] = \frac{1}{T^2}$$

Q6. Solution de l'équation homogène : $\theta_H(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$

solution particulière : $\theta_p = \frac{i B \frac{l^2}{2J}}{\frac{K}{J}} = \frac{i B l^2}{2K}$ Donc solution général : $\theta(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t) + \theta_p$

Conditions initiales à $t=0^+$:

$$\rightarrow \theta(0) = 0 \Rightarrow C + \theta_p = 0 \Rightarrow C = -\theta_p$$

$$\rightarrow \dot{\theta}(t) = -\omega_0 C \sin(\omega_0 t) + \omega_0 D \cos(\omega_0 t) \text{ qui est nul initialement donc } \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \omega_0 D = 0 \Rightarrow D = 0$$

finalement
$$\theta(t) = \frac{i B l^2}{2k} (1 - \cos(\omega_0 t))$$

Q7

Pour que la partie mobile quitte la zone conductrice il faut que la valeur maximale de $\theta(t) = \frac{i B l^2}{2K} (1 - \cos(\omega_0 t))$ soit **plus grande que** θ_F

la valeur maximale de $\theta(t) = \frac{i B l^2}{2k} (1 - \cos(\omega_0 t))$ est obtenu quand le cosinus est minimal (donc vaut -1)

ainsi $\theta_{max} = \frac{i B l^2}{2K} 2 = \frac{i B l^2}{K}$ on veut que $\theta_{max} > \theta_f$ où $\theta_f = \frac{\pi}{60} = 5,23 \times 10^{-2} \text{ rad}$

soit $K > \theta_f \Leftrightarrow K < \frac{i B l^2}{\theta_f}$

ici $B = \mu_0 \mu_r n I = 4 \pi 10^{-7} \times 500 \times 2000 \times 1 \approx 1,25 \text{ T}$

donc $K_{max} = \frac{1 \times 1,25 \times (3 \times 10^{-2})^2}{5,23 \times 10^{-2}} = 2,15 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$

on a bien $K_{\text{énoncé}} < K_{\text{max}}$ donc la condition est bien vérifiée

Q8. Déterminer l'expression puis la valeur de l'instant t_1 pour lequel la partie mobile quitte l'arc conducteur.

$$\theta_F = \frac{i B l^2}{2k} (1 - \cos(\omega_0 t_1)) \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arccos \left(\frac{\frac{i B l^2}{2k} - \theta_F}{\frac{i B l^2}{2k}} \right)$$

A.N $t_1 = 0,0205 \text{ s}$

I.B.3) Rupture du contact

Q 9. Il n'y a plus la force de Laplace donc plus le terme A dans l'équation différentielle qui devient

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Q 10.

Initialement (au début de la phase2) l'angle initial est $\theta(t=t_1) = \theta_F = \frac{\pi}{60} = 0,052 \text{ rad}$

la valeur de θ oscille donc entre 0,052 et 0,096 ce qui correspond à deux fois l'amplitude .

donc l'amplitude vaut $A = (0,096 - 0,052)/2$ soit $A = 0,022 \text{ rad}$

I.B.4) Phénomène d'induction

Q11

Comme la surface traversée par le champ varie au cours du temps , le flux Φ du champ magnétique à travers

cette surface varie aussi, et d'après la loi de Faraday $e = \frac{-d\Phi(t)}{dt}$ une force électromotrice va apparaître

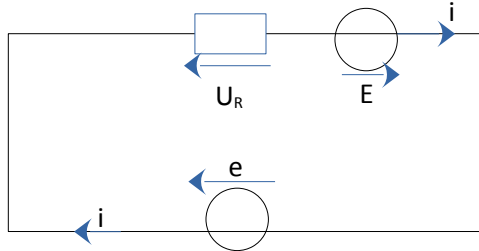
Q12 D'après la loi de Faraday :

$$e = \frac{-d}{dt} \left(\iint_{\text{Traversée par le champ}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \frac{-d}{dt} (B \vec{e}_z \cdot S \vec{e}_z) = \frac{-d}{dt} (BS(t)) = -B \frac{dS}{dt} = \frac{-Bl^2}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

comme $B > 0$ et $\frac{d\theta}{dt} > 0$ alors $e < 0$: cette f-e-m s'oppose donc à la tension E du générateur

c'est cohérent car **d'après la loi de Lenz** les effets de l'induction s'oppose aux causes qui leurs ont données naissance (ici la tension du générateur)

Q13 On suppose que la résistance électrique du circuit vaut R. faire un schéma électrique du circuit en faisant apparaître la résistance R, la f-e-m d'induction, le générateur et sa tension E et le courant i.



Q14 D'après la loi des mailles : $u_R = e + E$ soit $Ri = -B \frac{l^2}{2} \frac{d\theta}{dt} + E \Rightarrow i = \frac{1}{R} \left(-B \frac{l^2}{2} \frac{d\theta}{dt} + E \right)$

Q15

Avec induction $i = (e + E) / R$ et $e < 0$ sans induction $i = E / R$

Donc i sera plus faible en prenant en compte le phénomène d'induction.

I.B.6) Résumé

Q 16.

On a montré que dans les deux phases, l'évolution de $\theta(t)$ était sinusoïdale : **la courbe 4 est donc fausse**

On a vu que les solutions étaient différentes dans les deux phases , **ce qui n'est pas visible sur la courbe 1**

la pulsation propre est identique dans les deux phases donc la période des oscillations aussi : **la courbe 3 est donc fausse**

Par élimination , la courbe correcte est la 2