

## Problème 1 Le dermatographe, machine à tatouer électrique

Le dermatographe est composé de plusieurs éléments :

- une partie mobile attachée au support via une lame métallique à l'origine d'un couple de rappel ;
- des bobines avec des noyaux ferromagnétiques, générant un champ magnétique. Il est par ailleurs alimenté par un générateur, généralement contrôlé par le tatoueur via une pédale.



**Figure 1** Dermatographe

Le principe du dermatographe repose sur l'alternance entre deux phases. Dans un premier temps, la partie mobile est en contact avec la vis. Ce contact permet de fermer le circuit électrique alimenté par le générateur et formé par les bobines, la partie mobile et le support. Si le générateur fonctionne, un courant circule dans le circuit et en particulier dans les bobines. Un champ magnétique est alors créé par les bobines, ce qui génère une force sur la partie mobile, vers le bas. Dans un second temps, la partie mobile se décolle de la vis de contact, ouvrant le circuit. La force magnétique disparaît et la force de rappel ramène la partie mobile vers la position de contact. L'aiguille, accrochée à l'extrémité de la partie mobile, aura donc un mouvement périodique de haut en bas et de bas en haut.

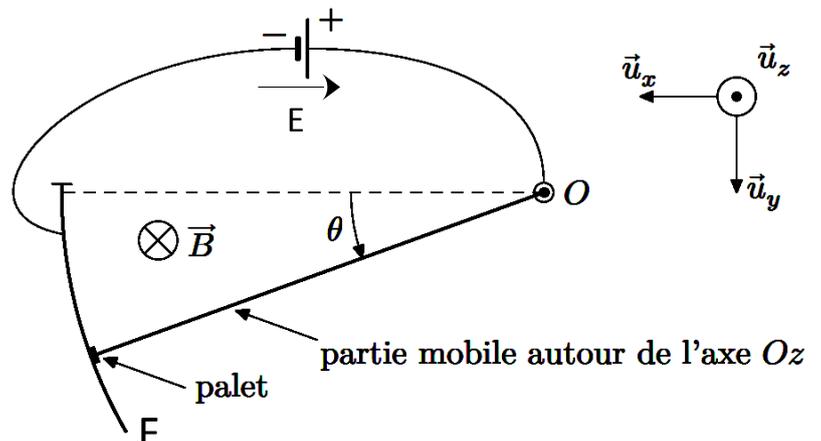
### I.A – Champ magnétique créé par une bobine

On considère dans un premier temps une bobine assimilée à un solénoïde infini d'axe ( $Oz$ ), avec un nombre de spires par unité de longueur  $n$  et parcourue par un courant d'intensité  $i$  permanente. On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires.

- Q 1.** En utilisant un schéma, déterminer la direction du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le courant circulant dans la bobine et indiquer les variables dont il dépend.
- Q 2.** En admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur de la bobine, déterminer le champ  $\vec{B}$  à l'intérieur de la bobine.
- Q 3.** Tracer l'allure des lignes de champ magnétique pour une bobine infinie, puis pour une bobine de longueur finie. Décrire les variations du champ magnétique dans les deux cas. Dans la suite, on suppose que la partie mobile se situe toujours dans une zone où le champ peut être considéré comme uniforme.

### I.B – Fonctionnement du dermatographe simplifié

Afin d'en simplifier l'étude, on s'intéresse, dans cette sous-partie, à une version modifiée du dermatographe. Cette modélisation est représentée ci-contre :



**Figure 2** Modélisation simplifiée du dermatographe

On modélise le contact par un arc de cercle conducteur avec lequel la partie mobile peut être en contact via un

palet à son extrémité. Au point F ( $\theta_F = \pi/60$ ), l'arc de cercle se termine.

On admet que tant que le contact est assuré, la partie mobile est parcourue par un courant d'intensité  $I$  et qu'elle se déplace dans une zone de champ magnétique uniforme  $\vec{B} = -B \vec{u}_z$  avec  $B > 0$ . Elle est soumise à un couple de rappel de moment  $\Gamma = -k \theta \vec{u}_z$ .

Il est rappelé que différentes valeurs numériques utiles sont disponibles en fin d'énoncé.

**On suppose que l'action du poids est négligeable devant les autres actions mécaniques et que les forces de frottement sont négligeables devant les autres forces mises en jeu.**

**Q 4.** Recopier sur la copie le schéma de la figure 2 en indiquant le sens du courant électrique dans la partie mobile, ainsi que la force s'exerçant sur celle-ci lorsqu'elle est parcourue par un courant (On supposera qu'elle s'applique au milieu de la partie mobile). Donner le nom et l'expression de cette force.

**I.B.1) Situation initiale**

**Q 5.** Initialement ( $t = 0^-$ ), le générateur n'est pas branché et la partie mobile est au repos. Quelle est alors la position de la partie mobile ? Justifier la réponse.

**I.B.2) Mise sous tension (contact assuré)**

**Q6.** On met le générateur sous tension à  $t = 0^+$ . effectuer un bilan des actions mécaniques sur la partie mobile pour  $t > 0$  :

**Q7.** à l'aide du théorème du moment cinétique, Montrer que  $\theta$  satisfait l'équation différentielle  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A$

avec  $\omega_0$  à exprimer en fonction des données et  $A = \frac{iBl^2}{2J}$ .

**Q8.** Par une analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de l'expression donnée pour  $A$ .

**Q9.** Résoudre l'équation différentielle pour déterminer l'expression de  $\theta(t)$  tant que le contact est assuré. On supposera notamment que la vitesse angulaire initiale est nulle.

**Q10 (difficile).** Lorsqu'on insère un matériau ferromagnétique dans une bobine, on modifie l'expression du champ créé en le multipliant par  $\mu_r$ , perméabilité magnétique relative du milieu. En reprenant l'expression du champ magnétique obtenu pour la bobine infinie parcourue par le courant d'intensité  $I$ , et sachant qu'on ajoute un matériau de perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 500$ , quelle doit être la valeur maximale du coefficient de rappel  $K$  pour qu'il puisse ne plus exister de contact entre la partie mobile et l'arc conducteur ? Vérifier que la valeur donnée dans l'énoncé satisfait à cette condition, sachant que l'intensité circulant généralement dans les dermatographes est d'environ 1 A et que les bobines ont un nombre de spires par unité de longueur  $n = 2 \times 10^3 \text{m}^{-1}$ .

**Q11.** Déterminer l'expression puis la valeur de l'instant  $t_1$  pour lequel la partie mobile quitte l'arc conducteur.

**I.B.3) Rupture du contact**

fermant le circuit On pose  $t' = t - t_1$ . À  $t' = 0$ , la partie mobile quitte l'arc conducteur, ce qui annule la force magnétique.

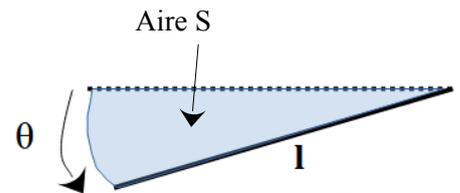
**Q 12.** Déterminer la nouvelle équation différentielle satisfaite par  $\theta$ .

**Q 13.** On admet que la valeur de l'angle maximal atteint par la partie mobile est de 0,096 rad. En déduire l'amplitude du mouvement de l'aiguille.

**I.B.4) Phénomène d'induction**

On rappelle que l'aire  $S$  de la surface du secteur circulaire de rayon  $l$  défini par un angle  $\theta$  peut-être calculée à partir de la formule suivante :

$$S = \theta \frac{l^2}{2}$$



le champ magnétique étant présent seulement sur le secteur circulaire délimité par l'arc conducteur, l'aire  $d$  du circuit traversée par le champ augmente de  $dS = d\theta \frac{l^2}{2}$  entre  $t$  et  $t+dt$  (pour  $t < t_1$ )

**Q14** Justifier soigneusement la présence d'une force électromotrice pour  $0 < t < t_1$ .

**Q15** Monter que la force électromotrice qui apparaît a pour expression  $e = -B \frac{l^2}{2} \frac{d\theta}{dt}$ . Commenter le signe.

**Q16** On suppose que la résistance électrique du circuit vaut R. faire un schéma électrique du circuit en faisant apparaître la résistance R, la f-e-m d'induction, le générateur et sa tension E et le courant i.

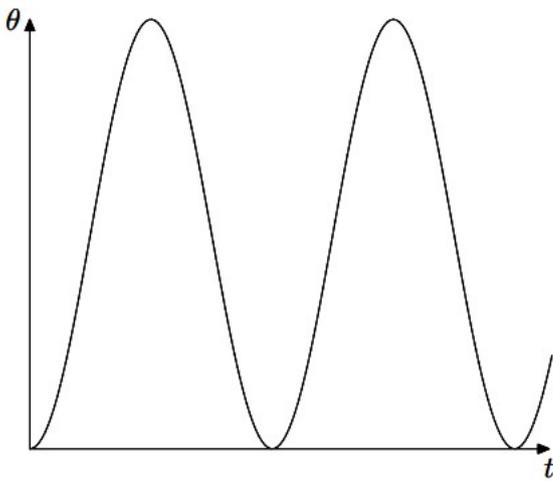
**Q17** Écrire la loi des mailles et exprimer i en fonction de B, l,  $\frac{d\theta}{dt}$ , R et E la tension du générateur.

**Q18** L'intensité du courant i(t) sera-t-elle plus importante ou plus faible en prenant en compte le phénomène d'induction comparativement au cas ou on le néglige ? Justifier à l'aide de la question précédente.

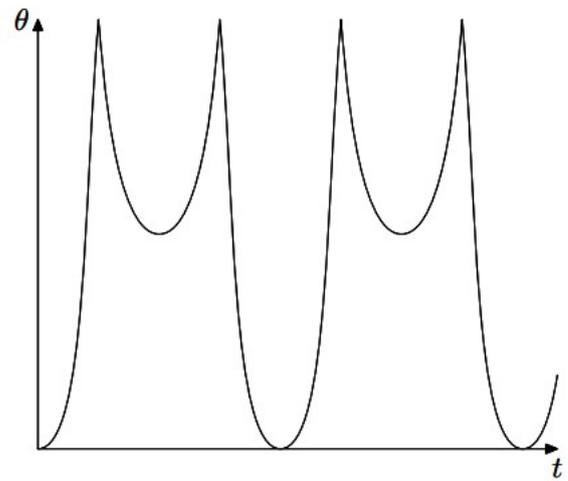
En pratique l'effet d'induction est négligeable, c'est ce qu'on supposera pour la question suivante

**I.B.6) Résumé**

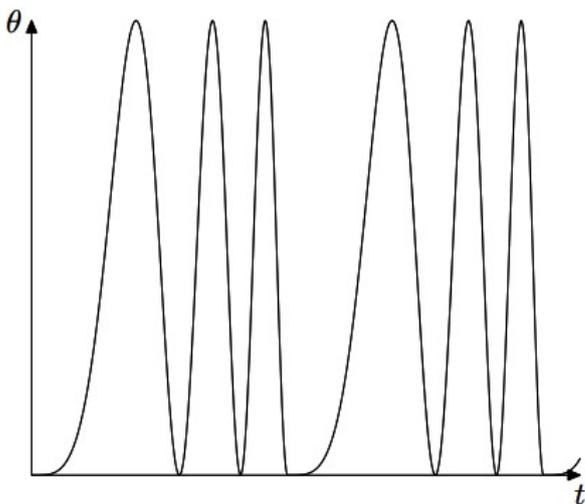
**Q 19.** Parmi les 4 courbes de la figure 3, choisir, en justifiant, celle représentant  $\theta$  en fonction du temps. Les courbes ont parfois été tracées en accentuant fortement les caractéristiques : en réalité, les deux phases sont moins différenciées.



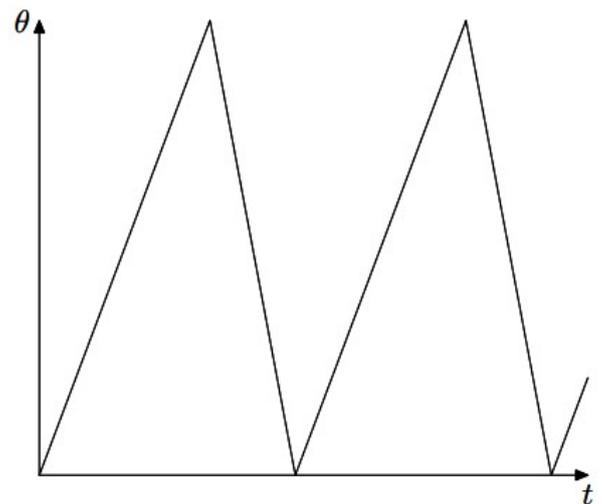
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

**Figure 3** Profils de  $\theta$  en fonction du temps