Lycée Jean Perrin

Filière PCSI

Samedi 29 novembre 2025

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE N°3

Oscillateurs harmoniques et amortis cinématique et dynamique Newtonienne

Durée de l'épreuve : 2 **heures 10**

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est autorisé.

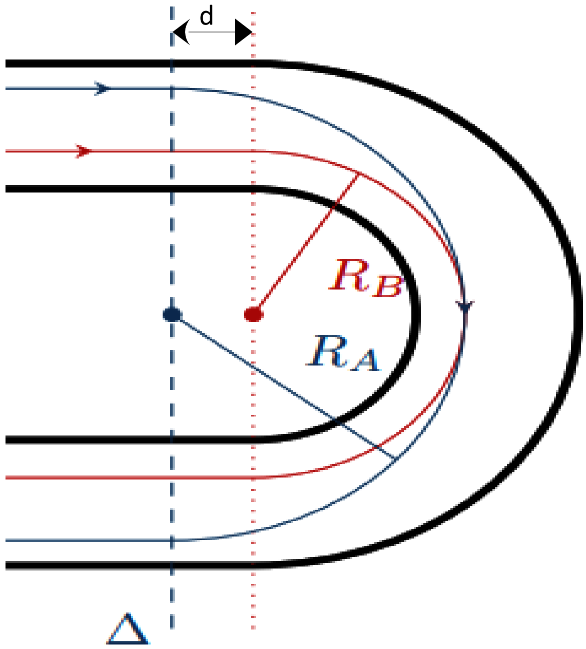
L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous semblent pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

- Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une **barre en marge**. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix, la cohérence des résultats obtenus et de les illustrer le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

EXERCICE I : Trajectoire optimale en formule 1 (25min)



Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Charles Leclerc et Lewis Hamilton, arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours.

Ils prennent le virage de deux façons différentes :

Hamilton suit une trajectoire circulaire de rayon

$R_A = 90{,}0$ m ; .

Leclerc choisit une trajectoire de rayon

$R_B = 75{,}0$ m.

On cherche à trouver la trajectoire optimale, c'est-à-dire à savoir lequel des deux pilotes gagne du temps dans le virage.

Q1 Déterminer l'expression de la distance d en fonction R_A et R_B

Q2 Sachant que le périmètre d'un demi-cercle de rayon R vaut π R exprimer la distance D_A parcourue par Hamilton entre les deux passages par l'axe Δ en fonction de R_A.

Q3 Exprimer la distance D_B parcourue par Leclerc entre les deux passages par l'axe Δ. en fonction de R_A et R_B . (on pourra utiliser la distance d comme intermédiaire)

On considère dans un premier temps la trajectoire de rayon A

Q4 En utilisant les coordonnées polaires, exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}_A$ en fonction de R_A et $\dot{\theta}$ et d'un vecteur unitaire. On reproduira la trajectoire circulaire avec les vecteurs de base polaire sur la copie.

Q5 On suppose que le mouvement est uniforme. Que peut-on alors dire sur le vecteur vitesse $\vec{v}_A$?

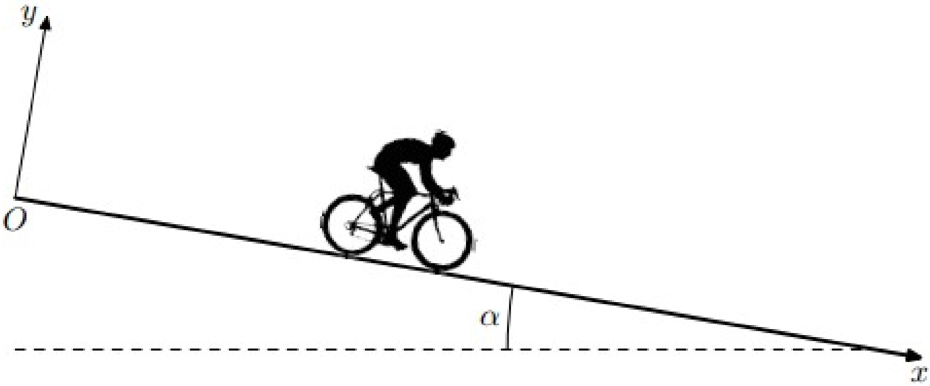
En déduire l'expression de l'accélération $\vec{a}_A$ en fonction de R_A et v_A et d'un vecteur unitaire.

Q6 l'accélération des voitures doit rester inférieure ou égale à 0,8 g : au delà de cette limite, elles dérapent et finissent la course dans les graviers. En déduire la valeur numérique de v_A si le pilote subit l'accélération limite.

Q7 En déduire le temps Δt_A que met le pilote A (Hamiltron) pour parcourir la distance D_A à la vitesse constante v_A, faire l'application numérique.

Q8 En supposant que le coureur B (Leclerc) est aussi à accélération limite dans la partie circulaire de sa trajectoire de longueur D_B , déterminer si il met moins de temps que Leclerc entre les deux passages par l'axe Δ.

EXERCICE II : Descente en vélo (50min)



Pour toute cette partie, on considérera le système {cycliste + vélo}, assimilé à un point matériel M. On supposera ce système soumis aux seules actions extérieures suivantes :

— l'action de la pesanteur, notée $\overrightarrow{P}$;

— l'action de la route sur les roues, notée $\overrightarrow{R}$ incluant :

- **la réaction normale, notée $\overrightarrow{N}$,**
- **la résistance au roulement, notée $\overrightarrow{F_r}$ et supposée telle que $\overrightarrow{F_r} = -\mu_r N\vec{e}_x$ où N est la norme de la réaction normale et μ_r le coefficient de résistance au roulement ;**

— l'action de l'air sur le système.

On note m la masse du système, $\vec{v}$ la vitesse du système dans le référentiel terrestre, $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, α l'angle entre la direction horizontale et la direction de la route.

Avant d'envisager une étude en régime permanent, il est nécessaire de caractériser la phase de démarrage pour déterminer la distance que parcourt le cycliste avant d'atteindre sa vitesse limite. On supposera que le cycliste est initialement à la position $x = 0$ à l'instant $t = 0$ et se lance dans la pente sans vitesse initiale. On modélise l'action de l'air sur le système {cycliste + vélo} par une force de traînée de la forme

$$\overrightarrow{F_T} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v\vec{v}$$

où ρ est la masse volumique de l'air, S la surface frontale projetée sur le plan perpendiculaire à l'écoulement, Cx le coefficient de trainée aérodynamique du système {cycliste + vélo} et v, la norme de sa vitesse par rapport à la route. Dans cette section, on prendra pour les applications numériques $S\,Cx = 0{,}30\ \mathrm{m}^2$ et $\alpha = 0{,}10$ rad (descente sur une pente de 10 %). Autres données numériques :

Viscosité dynamique de l'air	$\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ Pa·s
Accélération de la pesanteur	$g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Masse du système {cycliste + vélo}	$m = 80$ kg
Coefficient de résistance au roulement du vélo sur la route	$\mu_r = 6{,}4 \times 10^{-3}$
Masse volumique de l'air	$\rho=1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$

Q1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v, la norme de la vitesse du système {cycliste + vélo }. On l'écrira sous la forme suivante (Equation (1)), en précisant les expressions littérales et les valeurs numériques des paramètres a et b

$$\frac{dv(t)}{dt}+bv(t)^2=a \qquad \text{Équation (1)}$$

Q2 En utilisant l'équation différentielle précédemment établie, déterminer la norme de la vitesse limite atteinte en régime permanent, que l'on écrira sous la forme $v_{\lim}=\sqrt{\frac{K}{SC_x}}$

où K est une constante que l'on déterminera en fonction de m, g, ρ, α et μ_r

.**Q 3** Calculer la valeur numérique de $v_{\lim.}$ Commenter.

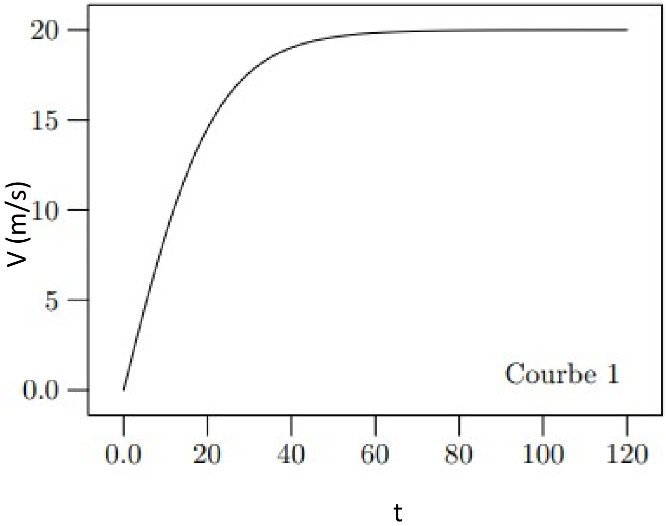
La figure ci-dessous propose un programme python pour résoudre numériquement l'équation (1)

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  def r(f, v, t):
4      V = [v]
5      for i in range(len(t) - 1):
6          V.append(V[i] + (t[i+1] - t[i]) * f(V[i]))
7      return V
8  def g(u):
9      return 0.92 - 2.3e-3 * u * u
10 x = np.linspace(0, 120, 1000)
11 y = r(g, 0, x)
12 plt.plot(x, y)
13 plt.show()
```

Q4 En explicitant les lignes concernées , indiquer le nom de la méthode utilisée.

Rmq : on pourra tirer du programme les valeurs numériques de a et b pour répondre à la question Q3 sans avoir fait Q2 et Q1

On a tracé expérimentalement à l'aide du programme l'évolution de la vitesse (m/s) en fonction du temps (secondes) sur la courbe 1 ci-contre.



On souhaite déterminer la distance L_{RP} parcourue dans les **20 premières secondes**

Q5 À partir de la courbe et en détaillant la démarche suivie, estimer un ordre de grandeur de cette distance.

Q6 : on note V la liste en python qui contient toutes les vitesses aux instants t[i] calculées avec le programme précédent. les instants t[i] sont stockées dans une liste appelée t

Écrire un programme permettant de calculer la distance parcourue L_{RP} au bout de 20 secondes à partir des listes V et t

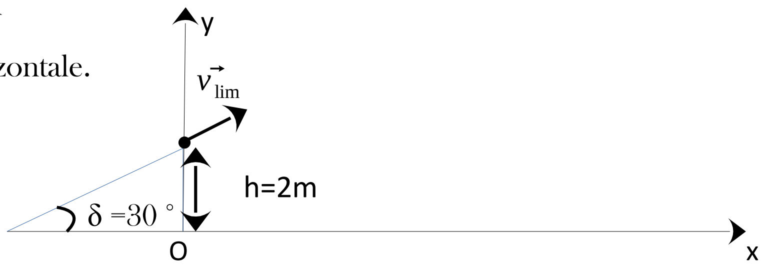
Q7 Après la descente, le cycliste prend un tremplin

de 2m de haut formant un angle δ =30 ° avec l'horizontale.

On suppose qu'il décolle à la vitesse v_{lim}

en négligeant les frottements de l'air,

Déterminer à quelle distance il touche le sol



<u>PROBLÈME 1</u> – Mouvement d'une plateforme en mer (50 min)

On s'intéresse à la résolution d'équations du mouvement dans une approche classique de la mécanique afin d'étudier le mouvement d'une plateforme en mer. Le modèle envisagé est un système à un degré de liberté considéré comme oscillateur : une masse est reliée à un ressort, avec ou sans amortissement, et peut être soumise à une excitation externe.

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m=110\,tonnes$ est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (figure1(a)).

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur $k$et à un amortisseur de constante d'amortissement γ, pouvant subir une excitation externe de force $\overrightarrow{F_{exc}}$, et se déplaçant sur un support (figure1(b)). Le ressort représente la rigidité de l'ensemble du support de la plateforme. L'amortisseur permet de prendre en compte l'effet de l'eau environnante et la force d'excitation externe celui des vagues qui frappent périodiquement la plateforme. La masse est supposée se déplacer selon une seule direction parallèle à l'axe (Ox) en fonction du temps t.

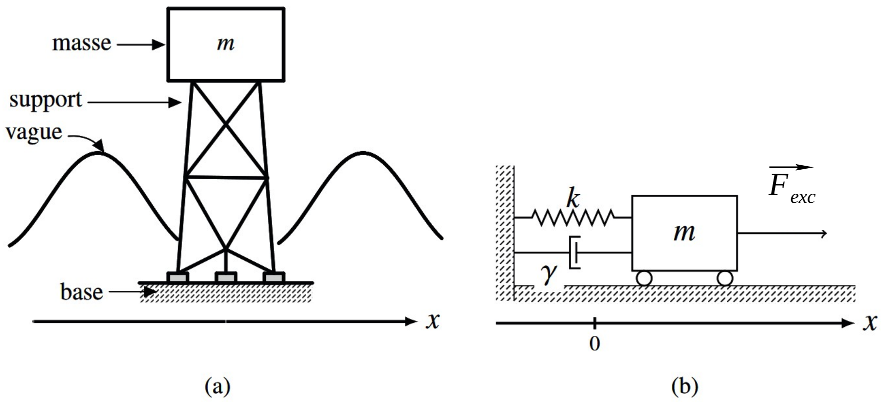


Figure 1 – (a) plateforme en mer soumise aux vagues marines, (b) système masse (m), ressort (k), amortisseur (γ) et excitation externe ($\overrightarrow{F_{exc}}$)

Les projections sur l'axe (Ox) de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. La force totale $\overrightarrow{F_{tot}}$agissant sur la masse correspond à la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$de la base horizontale, à la force de frottements $\overrightarrow{F_d}$, à la force de rappel $\overrightarrow{F_k}$ du ressort, au poids $\vec{P}$ de la masse et à la force $\overrightarrow{F_{exc}}$ d'excitation externe. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x=0$. En l'absence d'action de l'amortisseur, la masse se déplace sur la base horizontale sans frottements.

Q.1. Montrer que $\vec{P}$ et $\overrightarrow{R_N}$ se compensent.

Partie A – Ressort sans amortissement et sans excitation $\overrightarrow{F_{exc}}=\vec{0}$

Q.2. Démontrer que l'équation du mouvement de la masse correspond à l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$m\ddot{x}+kx=0$$

Q.3. La solution de cette équation prend la forme générale suivante :

$$x(t)=A_0\sin(\omega_0 t)+B_0\cos(\omega_0 t)$$

Avec A_0 et B_0 deux coefficients réels. Exprimer ω_0 en fonction des grandeurs caractéristiques du système. Donner son nom et sa dimension.

De plus, en remarquant qu'à t=0 $x(t)=x_0$ et $\dot{x}(t)=\dot{x}_0$, déterminer les expressions de A_0 et de B_0 en fonction de x_0, $\dot{x}_0$et de ω_0.

Q.4. On cherche à reformuler l'équation précédente sous une forme plus compacte du type :

$$x(t)=R_0\cos(\omega_0 t-\Phi_0)$$

Donner les expressions de R_0et de Φ_0 en fonction de x_0, $\dot{x}_0$et de ω_0.

Aide : $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

Q.5. Représenter qualitativement $x(t)$en fonction de $t$et indiquer sur le tracé R_0, x_0 et $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

Q.6. En utilisant les expressions des énergies cinétique $K(t)$ et potentielle $U(t)=\frac{1}{2}k\,x(t)^2$ du système, montrer que l'énergie mécanique $E(t)$ du système est alors :

$$E(t)=\frac{k\,R_0^2}{2}$$

Justifier le résultat obtenu.

Partie B – Ressort avec amortissement et sans excitation $\overrightarrow{F_{exc}}=\vec{0}$

Q.7. La force de frottements que l'amortisseur exerce sur la masse est considérée comme linéaire, c'est-à-dire proportionnelle au vecteur vitesse $\vec{v}$ de celle-ci : $\overrightarrow{F_d}=-\gamma\,\vec{v}$,avec γ constante d'amortissement ($\gamma>0$). En considérant une projection sur l'axe (Ox), démontrer que la position de la masse en fonction du temps suit l'équation du mouvement ci-après :

$$\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

Avec $\omega_0$défini en question Q.3. et Q à exprimer en fonction de γ, k et m.

Q.8. Le régime est supposée pseudo-périodique, que peut-on dire sur Q ?

Q9 Donner la forme des solution x(t), on introduira une pseudo-pulasion notée ω_d à exprimer en fonction de ω_0 et Q ainsi que deux coefficient réels A_d et B_d

Q10 Déterminer les deux coefficients réels A_d et B_d en fonction de x_0, $\dot{x}_0$,Q , ω_0 et de ω_d.

Q.11. Représenter qualitativement x(t) en fonction de t et indiquer sur le tracé x_0 et $\frac{2\pi}{\omega_d}$.

Q.12 On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2, tels que $t_2>t_1$ et $t_2-t_1=\tau_d$ avec τ_d la période des oscillations amorties (pseudo-période) .Le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps fait apparaître ces deux points sur la figure 2 .

En déduire Q sachant que $k=2{,}78\,10^5\,N/m$ (la masse est donnée ci-dessous)

Figure 2. Relevé du déplacement horizontal x (en m) de la plateforme de masse $m=110\,tonnes$ en fonction du temps t (en s). Les deux temps t_1 et t_2 mentionnés en question Q12 sont indiqués.