

## TD27- INTRODUCTION AU MONDE QUANTIQUE

**Pour tous les exercices, on prendra :**

- masse de l'électron :  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg ; masse du proton :  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg ;  $m(\text{Hélium}) = m_{\text{He}} = 6,64 \cdot 10^{-27}$  kg.
- constante de Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Js ; constante de Planck réduite  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Js
- charge de l'électron  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C ;  $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  J
- Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  kg<sup>-1</sup>.m<sup>3</sup>.A<sup>2</sup>.s<sup>4</sup> ; constante de Boltzmann  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  m<sup>2</sup> kg s<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>

### Exercice 1: Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

Quelle est la relation entre l'énergie d'un photon et sa fréquence (relation de « Planck-Einstein ») ?

- 1 Donner l'expression de la longueur d'onde de De Broglie d'une particule.
- 2 On considère l'expérience des fentes d'Young réalisée « photon par photon ».
  - a Qu'observe-t-on ? Pour répondre, on utilisera les mots « interférences » et « aléatoire ».
  - b Soit  $P_{F1}(M)$  (resp.  $P_{F2}(M)$ ) la probabilité que le photon arrive en un point M de l'écran sachant qu'il est passé par la fente 1 (resp. la fente 2), la fente 2 (resp. la fente 1) étant fermée. On appelle  $P(M)$  la probabilité de détecter le photon en un point M de l'écran. Dessiner sur le même graphe l'allure de  $P_{F1}(M)$  et de  $P_{F2}(M)$ . Quelle est la prévision de la mécanique classique pour  $P(M)$  ? En réalité, qu'observe-t-on ? Dessiner l'allure de  $P(M)$ .
- 3 Donner la signification physique de la fonction d'onde  $\Psi(M, t)$ .
- 4 Quelle est la probabilité d'observer une particule de fonction d'onde  $\Psi(x, t)$  entre les points d'abscisse  $x_1$  et  $x_2$  ?
- 5 Donner la relation d'incertitude d'Heisenberg
- 6 Établir l'expression des niveaux d'énergie  $E_n$  d'un électrons autour d'un proton en supposant que le moment cinétique est quantifié
- 7 Etablir l'expression des niveaux d'énergie  $E_n$  d'une particule dans un puits de potentiel infini à une dimension à l'aide d'une analogie avec les modes propres d'une corde vibrante.
- 8 Quelle est la condition pour qu'une particule ait son énergie quantifiée ?
- 9 A l'aide d'une analogie avec la diffraction des ondes lumineuses, établir l'inégalité  $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$
- 10 Etablir l'expression de l'énergie cinétique minimale  $E_{\min}$  d'une particule confinée spatialement.

### Exercice 2: Modèle de Bohr de L'atome d'hydrogène

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (appelé aussi modèle semi-classique) consiste en les deux hypothèses suivantes :

1ère : la trajectoire de l'électron est circulaire autour du noyau fixe ;

2ème : le moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe du cercle ne peut prendre que les valeurs  $n\hbar$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\hbar = h / 2\pi \approx 1,055 \cdot 10^{-34}$  J.s .

1. Laquelle de ces hypothèse est de nature quantique ?
2. En utilisant cette hypothèse, établir une relation liant le rayon de l'orbite  $r_n$ , la vitesse de l'électron  $v_n$  et la constante de Planck réduite  $\hbar$
3. En appliquant le PFD à l'électron et en utilisant le résultat précédent, montrer que  $v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \cdot \frac{1}{n}$  où  $e$  est la charge élémentaire et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide.
4. Montrer que l'électron possède une énergie potentielle  $E_p(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  du fait de son interaction électrostatique avec le proton, avec  $r$  la distance entre les deux particules et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide.
- 5-Établir l'expression de l'énergie mécanique  $E_n$  du niveau  $n$ .

- 6- On peut montrer qu'on a alors  $E_n = \frac{-13,6}{n^2} \text{eV}$  Justifier que les photons émis lors de la désexcitation d'un électrons possèdent une fréquence de la forme  $\nu = \alpha \times \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$

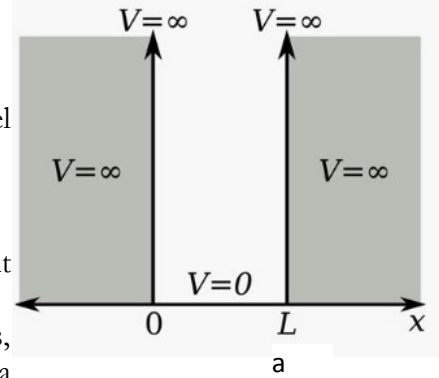
**Exercice 3: Longueur d'onde de De Broglie et record du 100m**

- 1 Calculer la longueur d'onde de De Broglie pour un électron de faible énergie cinétique  $E_c = 10\text{eV}$ . Citer une application.
- 2 Donner un ordre de grandeur de la longueur d'onde de De Broglie de Usain Bolt lorsqu'il a battu le record du monde de vitesse (9,58s) du 100m en 2009 à Berlin. Commenter.

**Exercice 4: Particule confinée dans un puits de potentiel infini**

On considère une particule  $m=9,11 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$  confinée dans un puits de potentiel infini à 1D de largeur  $a=1,0\text{nm}$ .

Sur la figure ci-contre  $V(X)$  correspond à l'énergie potentielle de la particule  $E_p(X)$



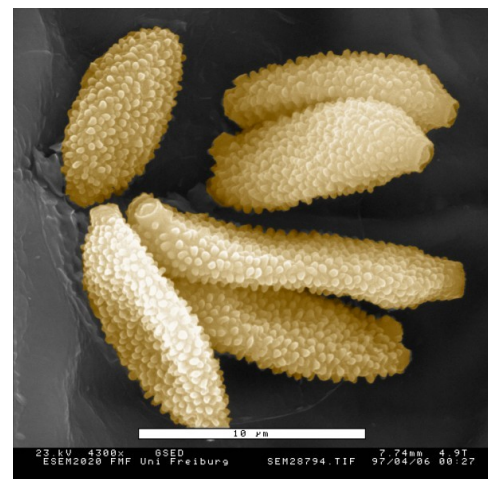
- 1 Justifier que dans une approche classique les zones  $X < 0$  et  $X > L$  sont inaccessible
- 2 Par analogie avec une corde vibrante fixée à ses deux extrémités, déterminer les niveaux d'énergies possibles de la particule. On vérifiera l'homogénéité du résultat.
- 3 Déterminer puis calculer l'énergie du niveau fondamental ( $n=1$ ).
- 4 Déterminer l'écart (homogène à une énergie) entre deux niveaux d'énergie consécutifs. On donnera le résultat en fonction de  $n$ ,  $h$ ,  $m$  et  $a$ . Commenter le cas où  $a$  tend vers l'infini.
- 5 Représenter sur axe vertical d'énergie les niveaux d'énergie en respectant l'écart entre les niveaux.
- 6 Déterminer puis calculer la plus petite fréquence pouvant être absorbée par la particule dans son état fondamental.

**Exercice 5: Microscope électronique à balayage**

Le pouvoir de résolution d'un microscope, c'est-à-dire la taille caractéristique des plus petits détails qu'il permet d'observer, est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde utilisée.

1. Quel phénomène limite le pouvoir de résolution d'un microscope ?
2. Rappeler les valeurs des longueurs d'onde extrêmes (dans le vide) du spectre visible et déterminer les énergies en eV des photons correspondants.
3. La taille des grains de pollen d'orchidée dont l'image est fournie ci-contre est de l'ordre de  $10\ \mu\text{m}$ .

a) Expliquer pourquoi cette image ne peut pas provenir d'un microscope optique, sachant qu'en grossissant l'image on peut observer des détails 100 fois plus petits que la taille des grains de pollen.



b) Cette image a été obtenue à l'aide d'un microscope électronique à balayage (MEB), dans lequel le faisceau d'électrons est envoyé sur l'échantillon à analyser. Après interaction avec la matière, ces électrons sont récupérés par des capteurs dont les informations permettent de reconstruire l'image. Évaluer l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique minimale des électrons utilisés pour obtenir ce « cliché ».

**Exercice 6: Absorption de photons par un puits quantique**

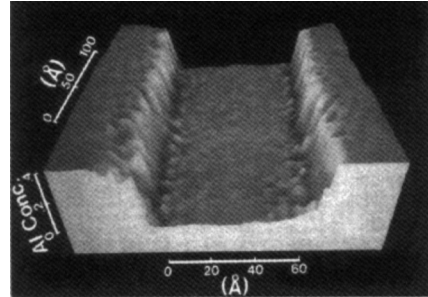
1. En utilisant une analogie avec les modes propres d'une corde vibrante, déterminer l'expression des énergies totales  $E_n$  d'une particule libre de masse  $m$  confinée dans un puits quantique de largeur  $L$ . On exprimera le résultat en fonction de  $m$ ,  $L$ , la constante Planck  $h$  et d'un entier  $n$  non nul.

2. Ce puits quantique peut émettre ou absorber un photon de fréquence  $\nu_{nk}$  si l'écart  $E_n - E_k$  entre deux niveaux d'énergie du puits vérifie la relation  $E_n - E_k = h\nu_{nk}$  ( $n > k$ ).

a) Expliquer en quoi cette relation traduit la conservation de l'énergie totale au cours de l'absorption ou l'émission du photon.

b) Déterminer les fréquences  $\nu_{21}$  et  $\nu_{31}$ , ainsi que les longueurs d'ondes correspondantes  $\lambda_{21}$  et  $\lambda_{31}$  pour un puits à semi-conducteurs à base d'arséniure de gallium (GaAs), d'épaisseur  $L = 60 \text{ \AA}$ , et tel que  $m = 0,067 m_e$  avec  $m_e$  la masse de l'électron.

c) À quel domaine du spectre appartiennent les longueurs d'ondes des photons obtenus dans la question précédente ? Proposer des applications pratiques de tels puits quantiques.

**Exercice 7: Énergie minimale d'un atome d'hydrogène**

Considérons un atome d'hydrogène constitué d'un proton et d'un électron. Le proton est supposé fixe et constitue l'origine du repère. L'électron possède une énergie potentielle  $E_p(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  du fait de son

interaction électrostatique avec le proton, avec  $r$  la distance entre les deux particules et  $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  la permittivité du vide. L'électron possède également une énergie cinétique  $E_c$ .

1. Supposons que l'électron est confiné au voisinage du proton dans une région d'extension spatiale notée  $a$ .

Établir l'inégalité sur l'énergie cinétique  $E_c \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ .

2. Déterminer la valeur  $a_0$  de  $a$  pour laquelle l'énergie totale est minimale. Exprimer l'énergie correspondante, notée  $E_0$ . Calculer  $a_0$  en picomètres ( $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$ ) et  $E_0$  en eV. Commenter les résultats obtenus.

**Exercice 8\* : Fonction d'onde d'une particule dans un puits infini**

Une particule quantique est confinée dans la zone comprise entre les plans  $x=0$  et  $x=L$  dans un puits infini. On admet que sa fonction d'onde est de la forme :

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx) \exp(-i\omega t) \text{ où } A, k \text{ et } \omega \text{ sont des constantes réelles positives.}$$

- Déterminer les valeurs possibles de  $k$  en fonction de  $L$  et d'un entier naturel non nul  $n$ .
- En utilisant la signification physique de la fonction d'onde, quelle est la probabilité de trouver la particule entre deux points d'abscisse  $x_1$  et  $x_2$  (avec  $x_1 < L$  et  $x_2 < L$ ) ? On donnera le résultat en fonction de  $\Psi(x, t)$ ,  $x_1$  et  $x_2$ .
- Déduire de la question précédente que  $\int_0^L |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$ .
- Déduire de la question précédente l'expression de  $A$  en fonction de  $L$ .
- Tracer  $|\Psi(x, t)|^2$  en fonction de  $x$  pour les cas  $n=1$  et  $n=2$ . Commenter, et comparer au cas d'une particule classique.

**Exercice 9\* : Oscillateur harmonique**

1. On étudie dans cette question le cas **classique** de l'oscillateur harmonique (chapitre 1). On considère un point matériel de masse  $m$  soumis à l'énergie potentielle élastique suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

- En écrivant la conservation de l'énergie, retrouver l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique.
  - Donner la solution de cette équation pour  $x(t=0) = X_0$  et  $v(t=0) = 0$ .
  - En déduire l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de  $m$ ,  $\omega_0$  et  $X_0$ .
  - Quelle est l'énergie mécanique minimale d'un oscillateur harmonique classique ?
2. On étudie dans cette question le cas **quantique** de l'oscillateur harmonique. On considère une particule de masse  $m$  dans un système (par exemple une molécule ou un réseau cristallin) de dimension  $d$ , soumise à l'énergie potentielle élastique suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La particule effectue des oscillations avec une certaine amplitude  $X_0 < d$ .

- Que vaut l'indétermination quantique  $\Delta x$  sur la position de la particule ?
- Montrer que l'on peut considérer (en ordres de grandeur) que l'indétermination  $\Delta p_x$  sur la quantité de mouvement de la particule vaut  $\Delta p_x \approx m \omega_0 X_0$
- En déduire, en utilisant l'inégalité de Heisenberg, une inégalité reliant  $m$ ,  $\omega_0$ ,  $X_0$  et  $\hbar$ .
- En utilisant l'expression de l'énergie mécanique trouvée au 1.c., en déduire l'énergie minimale d'un oscillateur harmonique quantique.