

# CONCOURS BLANC DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de cette épreuve comporte 9 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous semblent pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Certaines questions sont à priori plus complexes et demandent une prise d'initiative (**qui sera récompensée même si le raisonnement n'est pas abouti**) ces questions sont indiquées par un trait à côté du numéro de la question.

---

## Problème 1 : Le blue Fire

Le *Blue Fire* est l'une des montagnes russes du parc d'attraction Europa-Park, situé à Rust, en Allemagne. Elle est en service depuis le 4 avril 2009. Le nom de l'attraction a été choisi en référence à la couleur de la flamme émise par la combustion du gaz naturel, vecteur énergétique important.



**Figure 1** – Vue d'ensemble du *Blue Fire*

Cette montagne russe fait partie de la famille des montagnes russes lancées (*launched coaster*) : en effet, l'accélération principale du train a lieu dans la zone de départ, à l'aide d'une longue zone accélératrice rectiligne.

Ce sujet propose de suivre pas à pas le trajet d'un passager du *Blue Fire* pour étudier quelques aspects physiques et chimiques liés à cette attraction. Il comporte 4 parties indépendantes. Des données numériques utiles ainsi que quelques formules sont regroupées en fin d'énoncé, quand elles ne sont pas redonnées directement dans le texte.

Certaines questions, moins guidées, sont repérées par leur numéro souligné. Elles ne sont pas *a priori* plus difficiles que les autres, mais demandent de prendre plus d'initiatives. Pour ces questions, ce sont ces initiatives et leur pertinence qui sont évaluées plus que le résultat final. Le barème leur accordera un poids significatif.

## Partie A – Quelques mouvements

Juste après la phase d'accélération, le train aborde la première figure, représentée sur la figure 2:



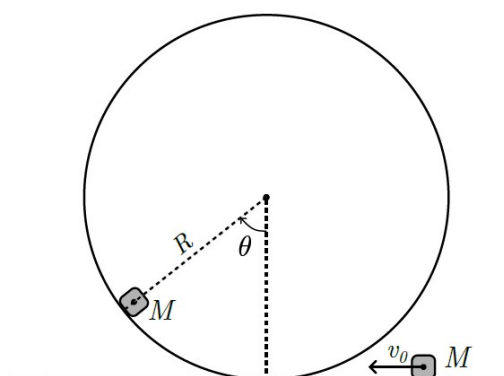
**Figure 2** – La première figure : le « fer à cheval »

1 En vous appuyant sur les informations à votre disposition dans les données en **fin d'énoncé**, justifier clairement, à l'aide d'un raisonnement énergétique, que le train peut a priori franchir cette première figure. On explicitera les hypothèses adoptées et les lois utilisées.

Juste après cette première figure, le train aborde un looping. On cherche à estimer à l'aide d'un modèle le temps mis par le train pour effectuer le looping. Pour cela, on va réduire l'étude du mouvement du train à celui de son centre de gravité, et on modélisera sa trajectoire par une trajectoire circulaire de rayon  $R$ . Cela revient donc à étudier le mouvement d'un point matériel  $M$  confondu avec  $G$ . On suppose dans ce modèle que l'action des rails sur  $M$  est normale aux rails pendant tout le mouvement, et on négligera tous les frottements. Au moment d'aborder le looping, le train possède la vitesse  $v_0 = 27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  orientée comme sur la figure 3. On prendra  $\theta(t=0) = 0$ .



looping réel



modélisation

**Figure 3** – Paramétrage du mouvement pour le looping

2 Reproduire le schéma simplifié du looping sur votre copie, et y représenter en  $M$  la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . Établir l'expression du vecteur accélération de  $M$  dans la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . On l'exprimera en fonction de  $v = \|\vec{v}\|$ ,  $\dot{v}$  et  $R$ .

3 Sur le schéma de la question précédente, représenter qualitativement le vecteur accélération de  $M$  pour  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = \pi$  et  $\theta = 3\pi/2$ . On justifiera la construction.

4 Établir l'équation différentielle liant  $\ddot{\theta}$  à  $g$ ,  $R$  et  $\theta$  au cours du looping. Peut-on déterminer  $\theta(t)$  de manière analytique (c'est-à-dire « à la main ») facilement à partir de cette équation ? Pourquoi ?

Pour estimer le temps nécessaire à la réalisation complète du looping, on propose de résoudre cette équation différentielle par un programme python utilisant la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` dont la spécification simplifiée est fournie à la fin du sujet.

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3
4 R=15 # Rayon en m
5 g=9.81 #accélération de la pesanteur en m/s^2
6 v0=27 # vitesse initiale en m/s
7 tabt=np.linspace (0 ,8 ,1000) # tableau des temps
8
9 def derivee(X,t):
10     return ...
11
12 theta0=0 # Angle initial
13 dtheta=... # Vitesse angulaire initiale
14 res=odeint (...)
15

```

5 Recopier en les complétant sur votre copie les lignes à partir de la ligne 9 pour que le programme calcule et affecte à `res` la solution de l'équation différentielle déterminée à la question précédente. Il faudra notamment remplir la fonction `derivee(X,t)` qui calcule la dérivée du vecteur  $X$  à l'instant  $t$ .

Par exemple si l'équation était sous la forme  $\ddot{\theta} + a\dot{\theta} + b\theta = 0$

on remplirait le programme de la façon suivante :

```

def derivee(X,t) :
    return ( X[1],-1*a*X[1]-b *X[0] )

```

.....

.....

```

res= odeint ( derivee, [ theta0,dtheta],t )

```

En exécutant ce programme, on obtient le graphe suivant pour  $\theta(t)$  :

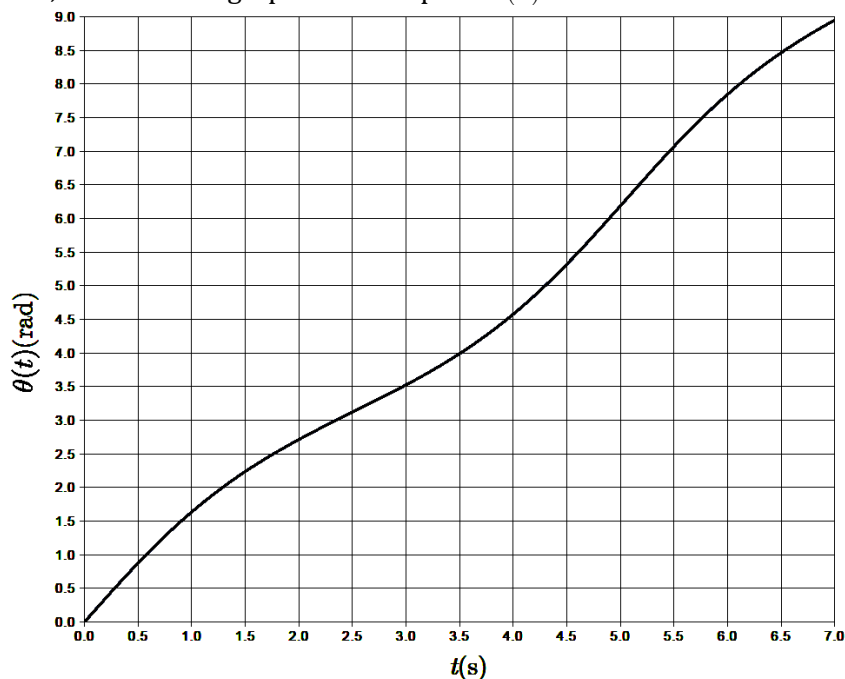


Figure 4 – Courbe de  $\theta(t)$  obtenue par simulation numérique

6 En déduire la valeur numérique du temps nécessaire pour effectuer le looping.

## Partie B – L'arrivée

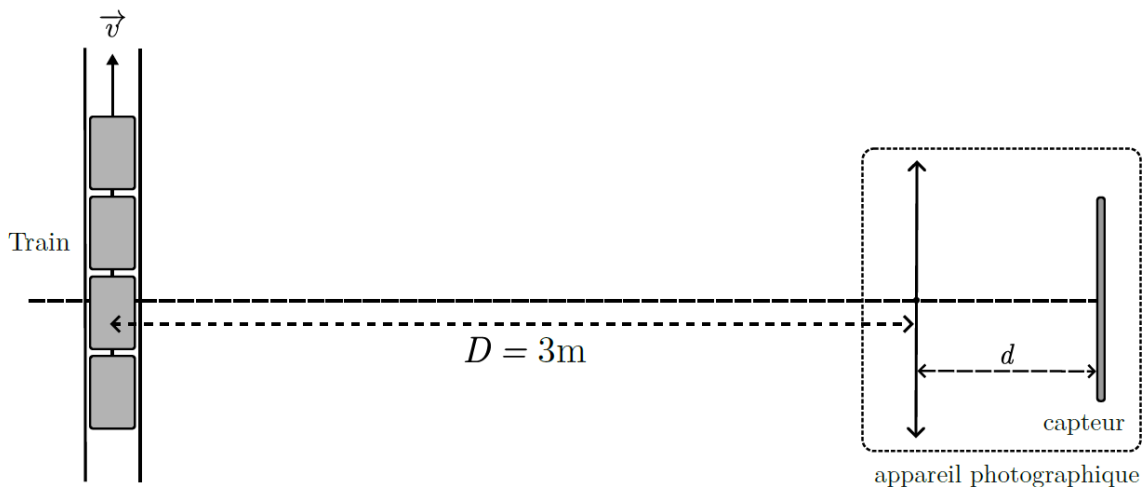
Lors de l'une des dernières figures, un appareil photographique numérique judicieusement placé prend des photos de chacune des voitures du train et de leurs passagers alors que le train est à grande vitesse. Les visiteurs peuvent ainsi acheter une photographie-souvenir de leur expérience dans le *Blue Fire* à la sortie.



**Figure 5** – Un exemple de photo souvenir prise au cours du trajet

L'objectif de l'appareil utilisé sera modélisé par une simple lentille mince convergente, de distance focale  $f' = 5,00 \text{ cm}$ . Il est situé à  $D = 3 \text{ m}$  du sujet à photographier au moment où la photographie est prise. Le capteur de l'appareil photographique, sur lequel se forme l'image, est une matrice rectangulaire de taille  $L \times l$  avec  $L = 36 \text{ mm}$  et  $l = 24 \text{ mm}$  constituée de pixels carrés de taille  $a$ . Le constructeur indique pour son capteur une résolution de 24 Mpixels soit  $24 \cdot 10^6$  pixels

Pour décrire la situation, on se placera dans la configuration géométrique simplifiée suivante :



**Figure 6** – Modèle simplifié de la prise d'une photographie

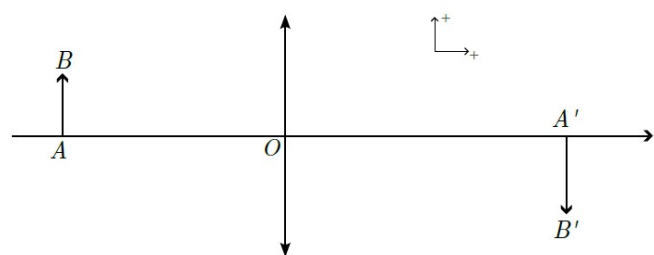
On notera en particulier que, même si le déplacement réel du train n'est pas orthogonal à l'axe optique de l'objectif, on fait ici cette hypothèse pour simplifier la description optique de la situation. Lors de la prise de la photographie, la vitesse de train est de  $v = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On rappelle la formule de conjugaison de Descartes pour une lentille mince :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

ainsi que la formule de grandissement algébrique :

$$y = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$



**Figure 7** – Définitions

Le schéma optique est représenté sur la figure 7

7 Quelles sont les conditions optiques permettant un stigmatisme approché ? Énoncer ces conditions.

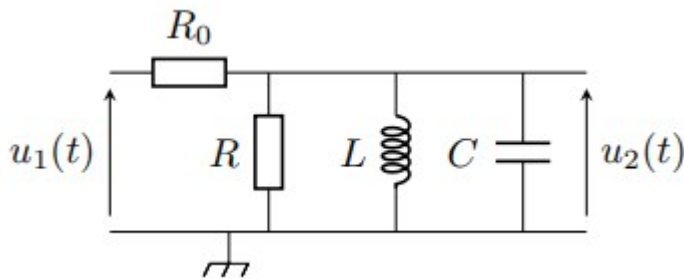
8 Déterminer avec deux chiffres significatifs la valeur numérique de la distance  $d$  entre le capteur et la lentille de l'objectif.

9 Déterminer la valeur numérique de  $a$ .

10 Montrer que si la durée d'exposition  $t_{\text{exp}}$  du capteur pendant la prise de la photographie est trop longue, la photo sera floue. Calculer un ordre de grandeur de cette durée maximale d'exposition pour obtenir une photographie nette en fonction des paramètres pertinents, et proposer une application numérique.

Pour déclencher l'appareil photo au bon moment on utilise un capteur de position reposant sur des effets capacitifs : le déplacement sur un axe  $x$  du système d'intérêt modifie la capacité  $C$  d'un condensateur, inséré dans le filtre ci-dessous figure 8. La fréquence centrale de la bande passante du filtre permet de déterminer la fréquence d'oscillation d'un oscillateur non représenté.

Figure 8 : filtre utilisé



Ce filtre a pour fonction de transfert complexe

$$H = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On donne  $A_0 = 0,1$  et  $Q = 25$

11 Donner les équations des deux asymptotes hautes et basses fréquences du gain en décibels de ce filtre.

12. Exprimer la pulsation  $\omega_R$  pour laquelle le gain  $G = |H|$  est maximal. Que vaut le gain maximal ?

13 - Représenter le diagramme de Bode (en amplitude seulement) donnant le gain en décibel en fonction de  $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

14 - Préciser la nature de ce filtre. Justifier

15 - Exprimer, à partir du schéma, la fonction de transfert  $H$  en fonction de  $\omega$  et des valeurs caractéristiques des composants de ce filtre  $R$ ,  $R_0$ ,  $L$  et  $C$ . Par identification, donner les expressions littérales de  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction des valeurs caractéristiques des composants. On pourra utiliser une impédance équivalente et un pont diviseur de tension.

En réalité la capacité  $C$  dans le circuit dépend de la position  $x$  du chariot par la relation est donnée par la loi

$$C(x) = C_0 \left(1 - \frac{|x|}{D}\right) \quad \text{avec } C_0 = 10 \mu\text{F} \text{ et } D = 1\text{m}$$

On donne aussi  $L = 10 \text{ mH}$

16 Le train est à une position  $x = 0$ , exprimer dans ce cas  $\omega_0$  en fonction de  $L$  et  $C_0$

17 Quand le train est en  $x = D$  vers quel valeur tend la pulsation propre  $\omega_0$  ?

## Problème 2 : Oscillations mécaniques et électriques

Il est souvent plus simple lorsque l'on veut étudier expérimentalement, au laboratoire, le comportement d'un oscillateur mécanique en fonction de ses paramètres, d'en réaliser une version électronique plutôt qu'une version mécanique. Les réglages sont plus fins car plus nombreux et la possibilité d'acquisition directe des signaux en divers points du circuit électrique permet la mise au point et l'adaptation de ce dernier à la richesse des oscillations mécaniques. Après avoir étudié un oscillateur mécanique et entrepris sa modélisation numérique dans la première partie, nous construirons progressivement dans la seconde son équivalent électronique. Dans tout le problème un point surmontant une fonction désigne sa dérivée temporelle :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

### Oscillateur mécanique

On considère un ressort d'extrémités N et M, de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$  et de longueur  $l(t) = NM$  à un instant  $t$  quelconque. Ce ressort est suspendu verticalement par son extrémité N à un point O fixe d'un support immobile dans le référentiel galiléen d'étude R. À son extrémité M est accroché un point matériel P de masse  $m$ . L'extrémité N (resp. M) du ressort se confond avec le point O (resp. P) (cf. figure 9).

Figure 9

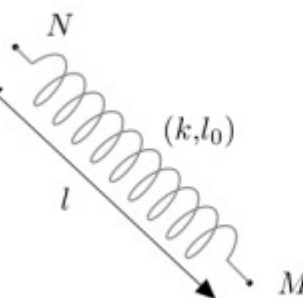
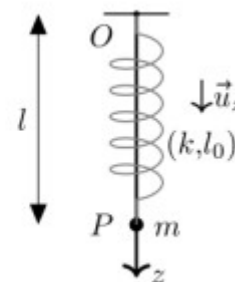


Figure 9 (bis)



On suppose que le mouvement du point matériel P reste vertical (figure 9 bis) : en se repérant dans le système de coordonnées cartésiennes  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  d'origine O, le point P appartient à la droite  $(O, \vec{u}_z)$ . Dans tout le problème, le ressort reste dans son domaine élastique de fonctionnement associé à une force de rappel proportionnelle à son allongement. Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est uniforme égal à  $\vec{g} = g\vec{u}_z$  avec  $g > 0$ . On néglige toute forme de frottement. On suppose tout d'abord que le ressort a une masse  $m_r$  nulle.

**18 Établir** l'expression de l'énergie potentielle élastique  $E_{p,k}$  du ressort dont on prendra l'origine lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On exprimera  $E_{p,k}$  en fonction de  $k$ ,  $l_0$  et  $l$ .

**19 Établir**, en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $l$ , l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{p,p}$  du point matériel P dont on prendra l'origine en O. (attention au signe)

**20.** En déduire l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du point matériel P de masse  $m$  dans le référentiel galiléen R en fonction notamment de  $l(t)$  et  $\frac{dl}{dt} = \dot{l}(t)$ .

**21.** Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par  $l(t)$  dans le référentiel galiléen R.

**22** Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en indiquant l'expression de la solution particulière et en supposant qu'à  $t = 0$ , le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position  $l(t = 0) = L > 0$ . On fera apparaître une pulsation  $\omega_0$ . Quelle condition doit-on imposer à L pour que le point matériel P ne heurte pas le support fixe où est suspendu le ressort ? On exprimera cette condition en fonction de  $k$ ,  $l_0$ ,  $m$  et  $g$ .

**23** Qualifier le mouvement observé : tracer l'allure de  $l(t)$  en fonction de  $t$ . Donner l'expression de la période  $T_0$  du mouvement du point matériel P et calculer sa valeur numérique pour  $k = 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $m = 300 \text{ g}$

### Oscillateur électrique analogue

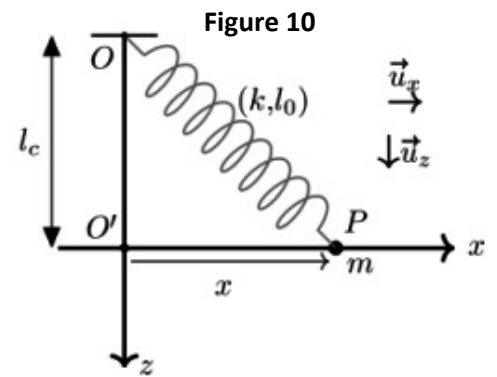
On veut réaliser un circuit électrique analogue à cette oscillateur à l'aide d'un condensateur initialement chargé sous une tension  $U_0$ , d'une bobine, d'un interrupteur et d'un générateur de tension idéal E.

À  $t < 0$  l'interrupteur est fermé et à  $t = 0$  on ferme l'interrupteur

**24** Réaliser un schéma du montage à  $t > 0$  et établir l'équation différentielle vérifiée par  $u_c(t)$  dans le circuit. On donnera l'expression de  $\omega_0$  en fonction de L et C. Donner aussi la solution unique de  $u_c(t)$  en prenant en compte les conditions initiales sur  $du_c/dt(0^+)$  et  $u_c(0^+)$

## Oscillateur mécanique avec équilibres stables et instables

Le point matériel P de masse  $m$  est maintenant astreint à se déplacer, sans frottement, horizontalement sur une glissière parfaite qui se confond avec la droite  $(O, \vec{u}_x)$  (cf figure 10). Le ressort précédent, dont on suppose la masse  $m_r$  nulle dans toute la suite du problème, est toujours accroché par son extrémité N au point O fixe dans le référentiel galiléen d'étude R et par son extrémité M au point matériel P



25 Exprimer  $l$  en fonction de  $l_c$  et  $x$ . Rappeler le lien entre l'énergie potentielle  $E_{p(x)}$  et les positions d'équilibre.

26 En fonction du paramètre  $l_c$ , discuter des positions d'équilibre du point P et de leur stabilité respective : on exprimera les abscisses d'équilibre  $x_e$  associées en fonction des données et on donnera les allures correspondantes de  $E_{p(x)}$  en fonction de  $x$  en précisant les valeurs remarquables.

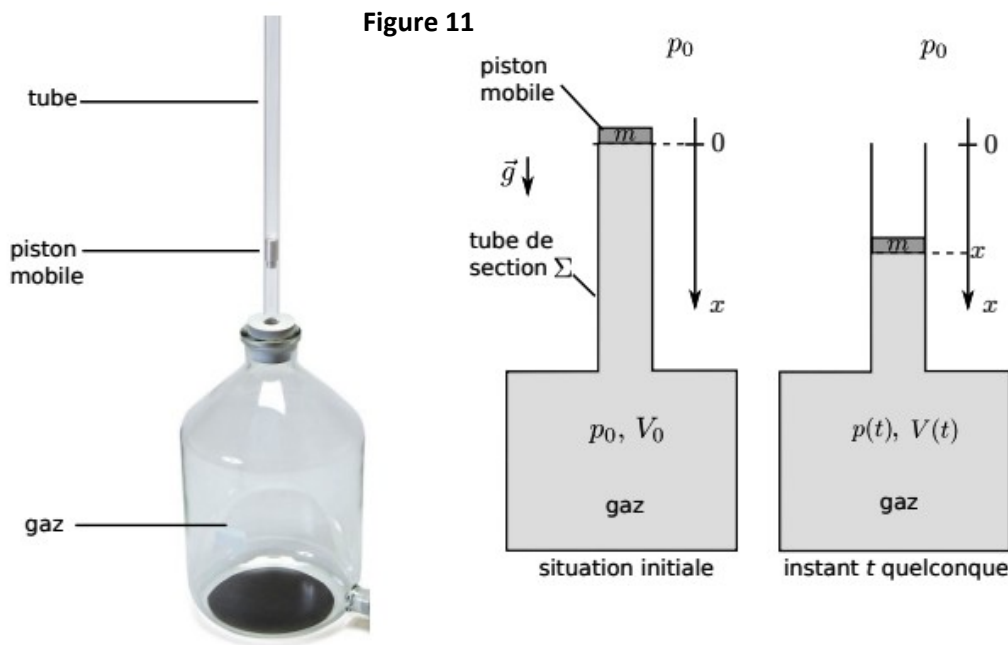
27 Dans quel cas peut-on parler de barrière de potentiel ? Préciser sa hauteur  $U_b$  en fonction des données.

28 Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par  $x(t)$  dans le référentiel galiléen R. Que représente physiquement  $\frac{dE_p}{dx}(x)$  en termes de force ?

29 Transformer l'équation différentielle du mouvement en 2 équations différentielles d'ordre 1 en variables  $u_0(t) = \dot{x}(t)$  et  $u_1(t) = \dot{x}(t)$ . En introduisant les estimations  $u_{0,n}$  de  $u_0(t)$  et  $u_{1,n}$  de  $u_1(t)$  aux instants  $t_n = n \Delta t$  pour  $n$  entier naturel où  $\Delta t$  désigne le pas de discrétisation temporelle, former les 2 relations exprimant  $u_{0,n+1}$  et  $u_{1,n+1}$  en fonction de  $u_{0,n}$  et  $u_{1,n}$  déduites de la méthode d'Euler explicite. Quelles valeurs doit-on donner pour  $n = 0$  à  $u_{0,n}$  et  $u_{1,n}$  ?

## Expérience de Ruchardt

Cette expérience consiste à placer un gaz dans un récipient étanche muni d'un tube (figure 11). On ferme le tout par un piston qui peut librement coulisser dans le tube. Le diamètre du piston est du mieux possible égal à celui du tube, ce qui assure une étanchéité (pas de fuite de gaz). Sous l'action de son poids, le piston commence à descendre. Ceci fait augmenter la pression dans le récipient, ce qui finit par arrêter la descente du piston, et par le faire remonter. Il s'en suit une série d'oscillations, comme on peut le voir sur la figure 12.



On utilise les notations de la figure 11. En particulier :

- $V_0$  est le volume initial de l'ensemble du gaz (récipient + partie dans le tube sous le piston).
- $V(t)$  est le volume de ce même gaz, mais à un instant  $t$  quelconque. La pression du gaz est notée  $p(t)$  et sa température  $T(t)$ .
- La pression atmosphérique est  $p_0$ . C'est aussi la pression dans le récipient à l'instant initial.
- La section du tube est notée  $\Sigma$ .
- La masse du piston est  $m$  et l'intensité de la pesanteur est  $g$ ,  $\vec{u}_x$  est un vecteur unitaire descendant.

30 La loi de Laplace pour le gaz s'écrit  $p(t) \times V(t)^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ , avec  $\gamma = C_p/C_v$  l'exposant adiabatique du gaz. On suppose dans toute cette partie que cette loi s'applique. Rappeler les hypothèses nécessaires pour que la loi de Laplace s'applique.

31 - Établir une relation entre le volume  $V(t)$ ,  $V_0$ , la section  $\Sigma$  et l'abscisse  $x(t)$  du piston (telle que définie sur la figure 11).

32-En effectuant un bilan des forces pressantes de chaque coté du piston à un instant  $t$  quelconque, exprimer la résultante des forces pressantes (notée  $\vec{F}$ ) en fonction de  $p(t)$ ,  $p_0$ ,  $\Sigma$  et  $\vec{e}_x$ .

33-En utilisant la loi de Laplace, la Q31 et le développement limité  $\left(\frac{1}{1 - \frac{x(t)\Sigma}{V_0}}\right)^\gamma \approx 1 + \gamma \Sigma \frac{x(t)}{V_0}$

valable pour  $\Sigma x/V_0 \ll 1$ , montrer que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston se met sous la forme :  $\vec{F} = -k\gamma x(t)\vec{e}_x$  avec  $k$  à exprimer en fonction des paramètres

34-En plus de  $\vec{F}$ , la seule autre force prise en compte comme agissant sur le piston est la force de pesanteur. À l'aide d'une étude mécanique, établir une équation différentielle portant sur  $x(t)$ .

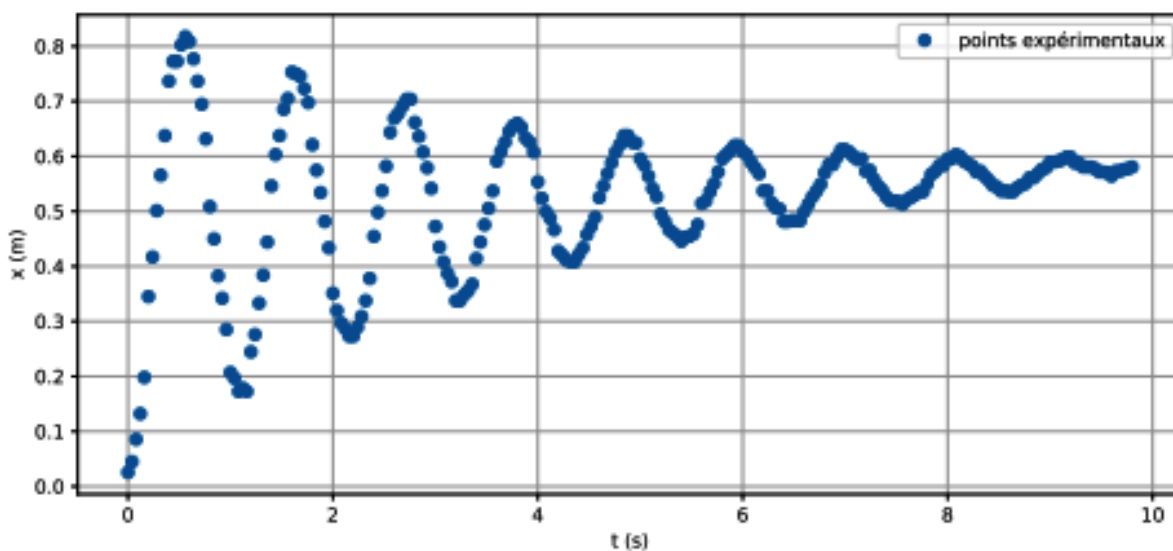
35- L'écrire sous une forme canonique en faisant intervenir la pulsation propre  $\omega_0$ . Donner l'expression de  $\omega_0$  en fonction de  $k$ ,  $\gamma$  et  $m$ .

36- Pour l'expérience considérée ici,  $m/k = 4,01 \times 10^{-2} \text{ s}^2$ . Le récipient étant rempli d'air, on mesure une période des oscillations  $T_0 = 1,08 \text{ s}$ . Exprimer  $\gamma$  en fonction de  $m/k$  et de  $T_0$ . Pour information, l'application numérique donne  $\gamma = 1,36$ , et la valeur théorique est 1,4.

#### Étude mécanique avec frottements

Un pointage vidéo réalisé sur une expérience est montré sur la figure 12. L'amortissement de la courbe  $x(t)$  montre qu'il y a présence de dissipation (frottements solides ou fluides, échanges thermiques entre le gaz et le récipient, non uniformité de la pression, amortissement d'ondes acoustiques...). L'objectif de cette partie est de modéliser cette courbe, sans chercher à comprendre le détail du processus de dissipation.

Figure 12



Nous supposons que l'équation du mouvement du piston s'écrit sous la forme suivante, et nous allons tester si ceci permet une description correcte de l'enregistrement  $x(t)$  :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = g \quad (2)$$

La pulsation propre de ce système est  $\omega_0$ , son expression théorique reste la même que précédemment. Le facteur de qualité  $Q$  traduit la présence plus ou moins forte de dissipation. Le second membre  $g$  est constant.

37 - En vous aidant de la figure 12, et sans faire de calculs, donner en justifiant une valeur approchée de  $Q$ . Comment se nomme le type de régime dans lequel se trouve le système ?

**38** - On écrit la forme générale des solutions de l'équation homogène ainsi :

$$x_H(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-\mu t}. \text{ Établir les expressions de } \Omega \text{ et de } \mu \text{ en fonction de } \omega_0 \text{ et } Q$$

**39**- Déterminer l'expression de la position d'équilibre,  $x_{\text{éq}}$ .

**40**- Tracer l'allure de la solution  $x(t)$ . On fera apparaître sur le graphique : la position initiale  $x(0)$ , la position d'équilibre  $x_{\text{éq}}$ , et la pseudo-période  $T = 2\pi/\Omega$ .

**41** - Y a-t-il une différence significative entre la période propre  $T_0$  et la pseudo-période  $T$  ? Justifier.

## Données utiles pour le traitement du sujet

### Données parties A et B

- Accélération de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Permittivité magnétique du vide :  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Données sur le *Blue Fire* :
  - Accélération moyenne du train pendant la phase d'accélération :  $a = 1,15 \times g$
  - Durée de la phase d'accélération :  $t_a = 2,5 \text{ s}$
  - Hauteur maximale de la première figure (« fer à cheval ») par rapport à la zone de lancement :  $h = 37 \text{ m}$
  - Rayon du looping  $R = 15 \text{ m}$
  - Masse totale d'un train et de ses passagers :  $m = 10 \text{ tonnes}$
  - Durée entre deux lancers successifs :  $\Delta t = 2 \text{ min } 30 \text{ s}$

Utilisation de la fonction odeint pour résoudre une équation différentielle d'ordre 2 d'une fonction inconnue  $x(t)$  :

`odeint(func, X0, t)`

Paramètres d'entrée :

**func** : fonction de  $X$  et du temps  $t$  qui renvoie la dérivée  $\dot{X} = [\dot{x}, \ddot{x}]$  du vecteur d'état  $X = [x, \dot{x}]$  à l'instant  $t$  sous forme d'une liste à 2 éléments.

**X0** : vecteur condition initiale  $X(t=0) = [x(t=0), \dot{x}(t=0)]$

**t** : tableau des temps pour lesquels la fonction doit calculer les valeurs de  $X(t)$ .

Valeur de retour :

Renvoie un tableau contenant les valeurs de  $X(t)$