TD06 – OSCILLATEUR HARMONIQUE

Version avec aides (questions intermédiaires et coups de pouce)

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

1 Donner l'expression de la force de rappel exercée par un ressort sur un point matériel ne pouvant se déplacer que selon une direction. On fera un schéma, et on donnera la signification et la dimension de tous les termes introduits.

Coup de pouce

Le ressort exerce une force proportionnelle à son *allongement* $l - l_0$ et opposée à celui-ci. Sur un schéma, placer l_0, l, l'axe (Ox) et le vecteur $\vec{e}_x$.

2 Soit une masse m posée sur le sol et reliée à un mur à sa gauche par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. On considère qu'il n'y a pas de frottements. On place l'origine du repère en l_0.

a Établir avec la plus grande rigueur dans la rédaction l'équation du mouvement. On introduira la pulsation ω_0 dont on donnera l'expression et la dimension.

Coup de pouce

Plan de rédaction : (1) système, référentiel (galiléen), repère ; (2) bilan des forces (poids, réaction normale, rappel) ; (3) principe fondamental de la dynamique ; (4) projection sur (Ox). Avec l'origine en l_0 : $x = l - l_0$.

b Donner la solution de l'équation du mouvement si le ressort est lâché sans vitesse initiale à une distance $x_0 \neq 0$ de sa position d'équilibre.

c Donner la solution de l'équation du mouvement si le ressort est lâché de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale $v_0 \neq 0$.

d Établir l'expression de la période T et de la fréquence f des oscillations de la masse m, d'abord en fonction de ω_0, puis en fonction de k et m.

e On admet que l'énergie potentielle élastique correspondant à la force de rappel d'un ressort est telle que $E_p = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ où l est la longueur du ressort à l'instant t. Contrôler la cohérence de la solution de l'équation obtenue à la question 2.a avec la conservation de l'énergie mécanique.

Coup de pouce

Écrire $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ et y injecter $x = x_0 \cos \omega_0 t$; utiliser $\omega_0^2 = k/m$ et $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

3 Définir l'amplitude, la phase à l'origine et la phase instantanée d'un signal sinusoïdal.

4 Soit un circuit LC comportant un condensateur chargé à $t = 0^-$ sous une tension U_0 qui évolue en régime libre à partir de $t = 0^+$.

4.a Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q accumulée sur l'armature positive du condensateur. On introduira la pulsation ω_0 dont on donnera l'expression et la dimension.

Coup de pouce

Loi des mailles : $u_C + u_L = 0$ avec $u_C = q/C$, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

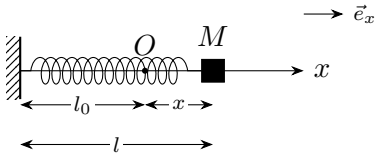
4.b Donner la solution de l'équation différentielle en définissant les conditions initiales.

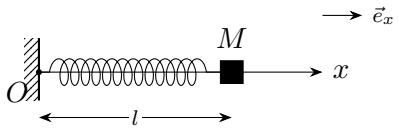
4.c Effectuer un bilan énergétique sur le système et contrôler la cohérence de la solution de l'équation obtenue à la question 4.a avec ce bilan.

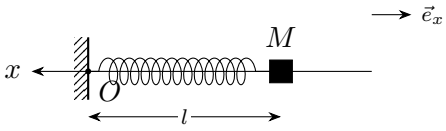
Exercice 2 : Expression de la force de rappel

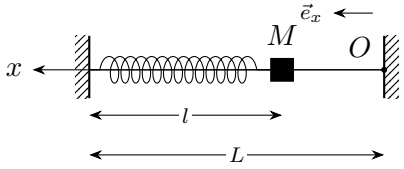
Niveau : • ★

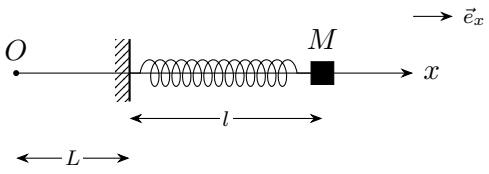
Donner l'expression de la force de rappel du ressort (de raideur k et de longueur à vide l_0) qui s'exerce sur le point M en fonction de x, $\vec{e}_x$, et éventuellement d'autres paramètres à déterminer (L, l_0...).

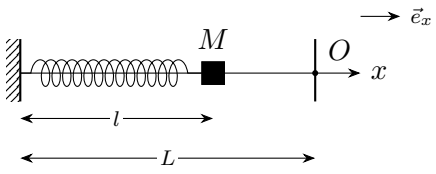
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

Coup de pouce

Méthode en 3 étapes pour chaque cas : (1) exprimer la longueur l du ressort en fonction de x (et de L) ; (2) écrire l'allongement $l - l_0$; (3) déterminer dans quel sens la force agit *quand* $l > l_0$ (vers le mur) et la projeter sur $\vec{e}_x$ (attention au sens de $\vec{e}_x$!).

Exercice 3 : Pour mieux comprendre le cours (1)

Niveau : •

On considère l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

1 Vérifier que $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ est solution de l'équation, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2 Vérifier que $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \psi)$ est solution de l'équation, avec $(C, \psi) \in \mathbb{R}^2$.

3 Vérifier que $x(t) = D\cos(\omega_0 t + \phi)$ est solution de l'équation, avec $(D, \phi) \in \mathbb{R}^2$.

Coup de pouce

Pour chaque forme : calculer $\dot{x}$, puis $\ddot{x}$ (dériver deux fois), puis former $\ddot{x} + \omega_0^2 x$. On rappelle $(\cos\omega t)' = -\omega\sin\omega t$ et $(\sin\omega t)' = \omega\cos\omega t$.

Exercice 4 : Pour mieux comprendre le cours (2)

Niveau : •

Résoudre les équations différentielles suivantes en introduisant une pulsation propre ω_0 et en représentant le système physique correspondant pour $t > 0$.

1. $(L_1+L_2)\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2}q(t) = 0,\ q_0 = C_1U_0,\ \dot{q}_0 = 0$ 2. $(m_1+m_2)\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx(t) = 0,\ x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = A$

3. $L\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{C_1+C_2}q(t) = E_0,\ q_0 = (C_1+C_2)U_0,\ \dot{q}_0 = 0$

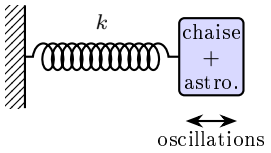
Coup de pouce

Diviser par le coefficient de la dérivée seconde pour mettre l'équation sous la forme $\ddot{y}+\omega_0^2 y = \text{const}$. Si le second membre n'est pas nul, chercher une solution particulière constante, puis ajouter la solution homogène $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ et utiliser les conditions initiales.

Exercice 5 : Comment « peser » un astronaute dans la Station spatiale ?

Niveau : • ★

Dans la Station spatiale internationale (ISS), en impesanteur, une balance ordinaire n'indique rien. Pour suivre la masse des astronautes, on utilise une **chaise montée sur un ressort** : l'astronaute s'attache sur la chaise, on la fait osciller et un capteur mesure la période T des oscillations. On modélise la chaise (masse m_c inconnue) et l'astronaute (masse m) par un point matériel unique attaché à un ressort de raideur k inconnue, dont l'autre extrémité est fixée à la station.



1. Pourquoi une balance à ressort « classique » (où l'on lit l'allongement à l'équilibre) ne fonctionne-t-elle pas dans l'ISS ? Pourquoi la mesure d'une période fonctionne-t-elle ?
2. Établir l'équation du mouvement et exprimer la période T en fonction de k, m et m_c.
3. **Étalonnage.** Chaise vide : $T_0 = 0{,}901\,\text{s}$. Chaise chargée d'une masse étalon $m_e = 20{,}0\,\text{kg}$: $T_1 = 1{,}416\,\text{s}$. En déduire k puis m_c.
4. Un astronaute s'installe : $T_2 = 2{,}150\,\text{s}$. Calculer sa masse.
5. Le chronométrage est précis à 0,1 % près sur T_2. Quelle est l'incertitude relative sur m ? Pourquoi est-il préférable que la chaise soit légère ?

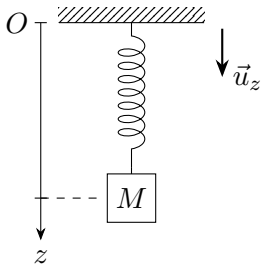
Coup de pouce

Écrire $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{k}(m+m_c)$ pour chaque mesure. En soustrayant les deux équations d'étalonnage, m_c disparaît et on obtient k. Pour l'incertitude : si $X = aT^2$, alors $\dfrac{\Delta X}{X} = 2\dfrac{\Delta T}{T}$.

Exercice 6 : Oscillations verticales

Niveau : •• ★★★

Un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé en O au plafond (voir figure). À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse z telle que la position du mobile soit $\overrightarrow{OM} = z\,\vec{u}_z$. L'origine du repère est imposée comme sur la figure ci-contre.



1 Effectuer un bilan des forces sur la masse. On considère qu'il n'y a pas de frottements.

Coup de pouce

Le mobile subit deux forces. Laquelle est verticale vers le bas ? Laquelle dépend de l'allongement $l - l_0$? Ici $l = z$.

2 Établir l'équation du mouvement de la masse.

3 Quelle est l'expression de la position d'équilibre z_{EQ} ?

Coup de pouce

À l'équilibre $\ddot{z} = 0$.

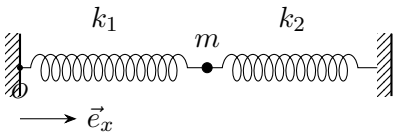
4 On pose $u(t) = z(t) - z_{EQ}$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.

5 Quelle est la période des oscillations ? Commenter.

Exercice 7 : Ressorts reliés horizontalement

Niveau : ●● ★★★

Deux ressorts linéaires sont reliés à une masse m, leur autre extrémité restant fixée à un support vertical (voir schéma). Le premier ressort a une raideur $k_1 = 3{,}0\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ et une longueur à vide $l_{10} = 10\,\mathrm{cm}$; le second a une raideur $k_2 = 10\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ et une longueur à vide $l_{20} = 20\,\mathrm{cm}$. Les 2 supports sont distants de $L = 1\,\mathrm{m}$. La masse m est susceptible d'osciller horizontalement (on ne tient pas compte du poids), sans frottement.



1 Rechercher la position d'équilibre de la masse. L'origine en O et le sens de $\vec{e}_x$ sont imposés comme ci-dessus.

Coup de pouce

Quand la masse est en x, quelles sont les longueurs l_1 et l_2 des deux ressorts ? Écrire la force de chacun sur la masse (sens !) puis la somme nulle à l'équilibre.

2 Déterminer l'équation différentielle qui caractérise le mouvement de la masse.

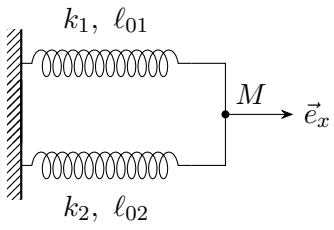
3 En déduire que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur équivalente.

4 Calculer la période d'oscillation de la masse m (on prendra $m = 100\,\mathrm{g}$).

Exercice 8 : Association de ressorts en parallèle

Niveau : ●● ★★★

On associe en parallèle (cf. figure) deux ressorts élastiques, alignés, de raideurs k_1 et k_2, de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}, formant un système élastique unique de longueur $\ell = \ell_1 = \ell_2$.



1 Déterminer la raideur k_{EQ} et la longueur à vide ℓ_{0EQ} du ressort élastique unique équivalent à cette association.

Coup de pouce

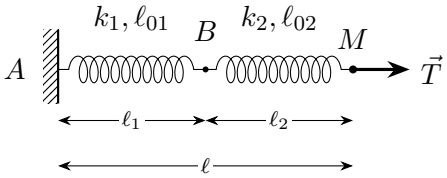
La force totale sur M est la somme des deux forces. La mettre sous la forme $-k_{EQ}(\ell - \ell_{0EQ})$ en identifiant le coefficient de ℓ puis le terme constant.

2 Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

Exercice 9 : Association de ressorts en série

Niveau : ●● ★★

On associe en série (cf. figure) deux ressorts élastiques sans masse, alignés, de raideurs k_1 et k_2, de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}, formant un système élastique unique de longueur totale $\ell = \ell_1 + \ell_2$.



1. Montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort élastique unique de longueur à vide $\ell_{0EQ} = \ell_{01} + \ell_{02}$ dont on exprimera la constante de raideur k_{EQ} en fonction de k_1 et k_2.

Coup de pouce

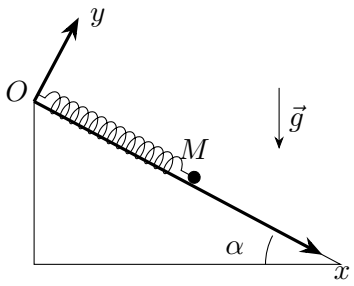
Les ressorts sont sans masse : la tension est la même dans les deux (le point B est à l'équilibre sans masse). Écrire cette tension avec chaque ressort, en déduire les allongements, puis les sommer.

2. Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

Exercice 10 : Oscillateur incliné

Niveau : ●●● ★★★

Un ressort linéaire de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé en O (voir figure). À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse x telle que la position du mobile soit $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x$. Le ressort se trouve sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On considère que le ressort est de masse négligeable devant m. L'origine du repère est imposée en O comme sur la figure. On considère qu'il n'y a pas de frottements.



1 Effectuer un bilan des forces sur le mobile M de masse m. On donnera en particulier les composantes de chaque force sur les axes (Ox) et (Oy).

Coup de pouce

Trois forces : poids, réaction normale du plan (perpendiculaire au plan), rappel du ressort. Décomposer le poids selon (Ox) le long du plan (vers le bas de la pente) et (Oy) perpendiculaire au plan. Quel angle fait le poids avec (Oy) ?

2 Établir l'expression de la position d'équilibre x_{EQ}. Vérifier son homogénéité et sa cohérence physique.

3 Établir l'équation du mouvement de la masse. La résoudre pour $x(0) = x_0 \neq x_{EQ}$ et $v(0) = 0$.

Coup de pouce

Projeter le PFD sur (Ox), puis réécrire le second membre à l'aide de x_{EQ} pour faire apparaître $\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_{EQ}) = 0$.

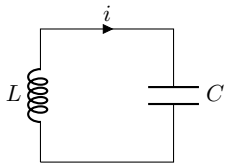
4 Comment aurait été modifiée l'équation différentielle si on avait choisi l'origine du repère en x_{EQ} ? Justifier.

5 Quelle est la période des oscillations ? Commenter (homogénéité, cohérence physique).

Exercice 11 : L'étiquette antivol des magasins : un circuit LC

Niveau : ● ★

Beaucoup d'articles portent une étiquette autocollante plate contenant une **spirale conductrice** (bobine d'inductance L) reliée à un **condensateur** de capacité C (deux armatures d'aluminium séparées par un film plastique). Les portiques de sortie émettent une onde électromagnétique autour de $f = 8{,}2\,\text{MHz}$: si le circuit de l'étiquette oscille à cette fréquence, il réémet un signal détecté par le portique.



1. On modélise l'étiquette par un circuit LC sans résistance. Établir l'équation vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur et donner la fréquence propre f_0.
2. La spirale a une inductance $L = 1{,}0\,\mu\text{H}$. Quelle capacité faut-il pour que $f_0 = 8{,}2\,\text{MHz}$?
3. Le condensateur est un « sandwich » aluminium/plastique : $C = \varepsilon S/e$ avec $\varepsilon = 2{,}0 \times 10^{-11}\,\text{F m}^{-1}$ et $e = 25\,\mu\text{m}$. Quelle surface d'armature faut-il ? Est-ce compatible avec une étiquette de quelques cm^2 ?
4. À la caisse, l'étiquette est « désactivée » en lui appliquant un champ intense qui fait claquer le film isolant (le condensateur devient un fil). Expliquer pourquoi le portique ne détecte plus l'étiquette.
5. Si l'on froisse l'étiquette, L diminue de 4 %. De combien varie f_0 ? Pourquoi les portiques balaient-ils une bande de fréquences autour de 8,2 MHz ?

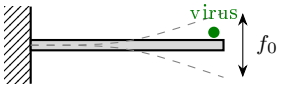
Coup de pouce

Loi des mailles $u_L + u_C = 0$ avec $u_L = L\dfrac{\text{d}i}{\text{d}t}$, $u_C = \dfrac{q}{C}$, $i = \dfrac{\text{d}q}{\text{d}t}$. Pour la question 5 : $f_0 \propto L^{-1/2}$, utiliser $(1+\varepsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \varepsilon/2$.

Exercice 12 : Peser un virus avec un micro-levier vibrant

Niveau : ●● ★★

Les nano-balances utilisent une poutre microscopique en silicium (micro-levier) qui vibre à sa fréquence propre. On la modélise par une masse effective $m = 1{,}0\,\text{pg}$ $(1{,}0 \times 10^{-15}\,\text{kg})$ au bout d'un ressort de raideur k. Sa fréquence propre est $f_0 = 1{,}00\,\text{MHz}$. Lorsqu'une particule de masse $\delta m \ll m$ se fixe sur le levier, la fréquence diminue de δf.



1. Calculer la raideur k du levier.
2. Exprimer la nouvelle fréquence f quand la masse devient $m+\delta m$. Montrer, à l'aide de $(1+\varepsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \varepsilon/2$, que
$$\frac{\delta f}{f_0} \simeq -\frac{1}{2}\frac{\delta m}{m}.$$
3. Un virus de masse $\delta m = 1\,\text{fg}$ $(10^{-18}\,\text{kg})$ se dépose. Calculer δf.
4. L'électronique mesure la fréquence à 1 Hz près. Quelle est la plus petite masse détectable ? La comparer à la masse d'une protéine ($\approx 50\,\text{kDa}$, $1\,\text{Da} = 1{,}66 \times 10^{-27}\,\text{kg}$).
5. Pourquoi a-t-on intérêt à fabriquer des leviers toujours plus petits ?

Coup de pouce

$k = m\omega_0^2 = m(2\pi f_0)^2$. Écrire $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m+\delta m}}$ puis factoriser par m sous la racine.