TD07 – NOTIONS DE CINÉMATIQUE

Version avec aides (questions intermédiaires et coups de pouce)

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

1 Donner la définition d'un solide.

2 Établir l'expression de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées polaires.

3 Établir l'expression de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes (3D).

4 Établir l'expression de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques.

5 Exprimer (sans démonstration) le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques.

6 On lâche une balle avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. On assimile la balle à un point matériel M. On néglige les frottements devant les autres forces.

- a Exprimer $\vec{a}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps.
- b Donner les 3 équations horaires du mouvement.
- c Quelle est la nature du mouvement pour $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_0$ colinéaire à $\vec{g}$?
- d Donner l'équation de la trajectoire $z(x)$ en coordonnées cartésiennes.
- e Quelle est la nature du mouvement dans le cas général ?

7 On considère que la Terre tourne autour du Soleil selon un mouvement circulaire (distance Terre-Soleil R constante) et uniforme ($\|\vec{v}\| = v_0$).

- a Montrer que $\vec{v}$ est orthoradial, et exprimer v_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R.
- b Établir l'expression de $\vec{a}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R, puis en fonction de v_0 et R. Commenter.

8 En fait, le mouvement de la Terre autour du Soleil n'est pas uniforme. Établir l'expression de $\vec{a}$ dans ce cas. Commenter.

9 De manière générale, un mouvement uniforme est-il caractérisé par une accélération nulle ? Pourquoi ?

10 De manière générale, on peut décomposer l'accélération en un point M en une accélération $\vec{a}_{\parallel}$ colinéaire à la vitesse et une accélération $\vec{a}_{\perp}$ perpendiculaire à celle-ci.

- a À quoi est liée la composante $\vec{a}_{\perp}$?
- b À quoi est liée la composante $\vec{a}_{\parallel}$?

11 Cinématique du solide : donner un exemple de translation rectiligne et un exemple de translation circulaire.

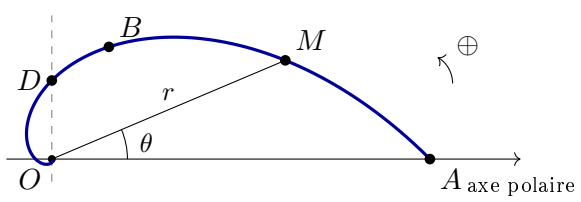
12 On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω.

- a Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide.
- b Exprimer la vitesse d'un point quelconque du solide en fonction de sa distance à l'axe et de ω.

Exercice 2 : Spirale logarithmique

Niveau : ●● ★

On repère la position d'un point M se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ, de pôle O. L'allure de la trajectoire, pour θ variant de 0 à 2π, est représentée ci-contre.



M décrit une spirale logarithmique d'équation $r = a\,e^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a une constante positive.

1 Dans un premier temps, la loi horaire est $\theta = \omega t$, avec ω constante positive appelée vitesse angulaire.

a Dessiner au point M les vecteurs de la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

b Exprimer dans cette base locale les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ du point matériel en fonction de a et ω.

c Exprimer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?

d Donner les composantes de $\vec{v}(A)$ et de $\vec{a}(A)$.

2* Dans un deuxième temps, on considère que le mouvement est uniforme de vitesse v_0. Trouver la loi horaire vérifiée par θ en prenant $\theta = 0$ pour $t = 0$.

Coup de pouce

1.b : $r(t) = a\,e^{-\omega t}$; utiliser $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$. 1.d : en A, $\theta = 0$. 2 : écrire $\|\vec{v}\| = v_0$ avec $\theta(t)$ quelconque, puis séparer les variables : $\mathrm{d}t$ d'un côté, $\mathrm{d}\theta$ de l'autre.

Exercice 3 : Usain Bolt accélère-t-il plus fort que la gravité ?

Niveau : ●● ★★★

Lors de la finale du 100 m des championnats du monde de Berlin (2009), Usain Bolt a établi le record du monde en 9,58 s. Les temps de passage tous les 10 m (mesurés depuis le coup de pistolet) étaient les suivants :

x (m)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t (s)	1,89	2,88	3,78	4,64	5,47	6,29	7,10	7,92	8,75	9,58

Son temps de réaction (entre le coup de pistolet et le départ effectif) était de 0,15 s. Dans la suite, on prend l'origine des temps au départ effectif.

1. Calculer la vitesse moyenne de Bolt sur chaque tronçon de 10 m. Quelle est sa vitesse maximale (en km/h) ? Est-elle atteinte à la fin de la course ?

2. On modélise la vitesse du sprinteur par $v(t) = v_{max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. Que représentent v_{max} et τ ? Tracer l'allure de $v(t)$.

3. Exprimer l'accélération $a(t)$, puis la position $x(t)$ (avec $x(0) = 0$).

4. Montrer que, pour $t \gg \tau$, $x(t) \simeq v_{max}\,(t - \tau)$. En utilisant les passages à 50 m et 90 m, en déduire v_{max} puis τ.

5. Calculer l'accélération de Bolt au départ. Commenter le titre de l'exercice.

6. Comme pour la charge d'un condensateur, au bout de quelle durée peut-on considérer que Bolt a atteint sa vitesse maximale ? À quelle distance du départ se trouve-t-il alors ? Comparer au tableau de la question 1.

Coup de pouce

1 : $\bar{v} = \Delta x/\Delta t$ sur chaque intervalle. 4 : pour $t \gg \tau$, $e^{-t/\tau} \to 0$; la droite $x = v_{max}(t - \tau)$ coupe l'axe des temps en $t = \tau$. Ne pas oublier de retirer 0,15 s aux temps du tableau. 6 : utiliser la règle des « 5τ » vue pour le circuit RC, et l'expression de $x(t)$.

Exercice 4 : Le lancer de marteau

Niveau : ●●● ★★★

Le record du monde du lancer de marteau masculin est de $D = 86{,}74\,\mathrm{m}$ (Iouri Sedykh, 1986). Le marteau est une boule de masse $m = 7{,}26\,\mathrm{kg}$ reliée à une poignée par un câble. L'athlète fait tourner le marteau sur un cercle de rayon $r \approx 1{,}8\,\mathrm{m}$ (câble + bras) avant de le lâcher.

1. Phase de vol. On néglige les frottements de l'air et la hauteur de lâcher. Le marteau est lâché avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec l'horizontale. Établir l'expression de la portée : $D = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Pour quel angle est-elle maximale ?

2. En supposant $\alpha = 45°$, calculer la vitesse de lâcher v_0 pour le record.
3. **Phase de rotation.** Juste avant le lâcher, le mouvement du marteau est assimilé à un mouvement circulaire uniforme. Calculer sa vitesse angulaire (en tours par seconde), son accélération (en g), puis la force que doit exercer le câble (on négligera le poids). Commenter.
4. **Bonus (Python).** En réalité, le marteau est lâché à environ 1,5 m du sol avec $\alpha \approx 40°$. Écrire un programme qui trace la trajectoire et cherche numériquement la valeur de v_0 donnant $D = 86{,}74\,\text{m}$.

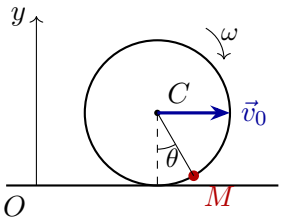
Coup de pouce

1 : reprendre les équations horaires du cours pour la chute libre ($h = 0$) et chercher l'instant $t_s \neq 0$ où $z = 0$. $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. 3 : $a = v_0^2/r$ et $F = ma$.

Exercice 5 : La valve du vélo

Niveau : ●●● ★★★

Une roue de vélo de rayon $R = 35\,\text{cm}$ roule sans glisser sur une route horizontale ; son centre C avance à la vitesse constante $v_0 = 18\,\text{km/h}$. On étudie le mouvement de la valve M, située sur la jante (à la distance R de C), dans le référentiel terrestre. À $t = 0$, la valve touche le sol en O.



1. La roue ne glissant pas, la distance parcourue par C est égale à la longueur de jante qui a « touché » le sol. En déduire la relation entre v_0, R et la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ de la roue. A.N.
2. Dans le référentiel du vélo (lié à C), quel est le mouvement de M ?
3. Montrer que, dans le référentiel terrestre, $x(t) = R(\omega t - \sin\omega t)$ et $y(t) = R(1 - \cos\omega t)$. Tracer l'allure de la trajectoire (une *cycloïde*).
4. Calculer le vecteur vitesse de M et montrer que sa norme vaut $v = 2v_0\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$. Où la valve va-t-elle le plus vite ? Le moins vite ? Expliquer pourquoi, sur une photo d'un vélo qui roule, les rayons du haut de la roue sont flous alors que ceux du bas sont nets.
5. Calculer le vecteur accélération de M. Montrer que sa norme est constante et qu'il est toujours dirigé vers C. A.N.

Coup de pouce

3 : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$ avec $\overrightarrow{OC} = v_0 t\,\vec{e}_x + R\,\vec{e}_y$; à $t = 0$, $\overrightarrow{CM} = -R\,\vec{e}_y$, puis $\overrightarrow{CM}$ tourne dans le sens horaire. 4 : $1 - \cos u = 2\sin^2\frac{u}{2}$.

Exercice 6 : Projections (très très très important, à maîtriser)

Niveau : ● ★★★★

Dans chacune des figures ci-dessous, déterminer en fonction des angles θ et α, la décomposition de :

a. $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$; b. $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$;
c. $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$; d. $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

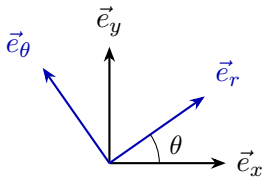


Figure 1

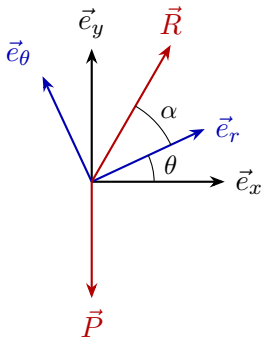


Figure 2

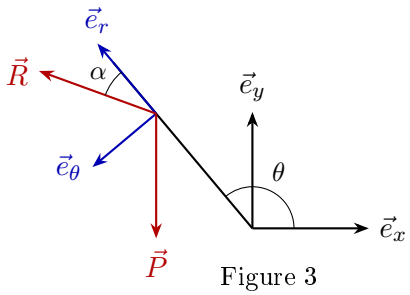


Figure 3

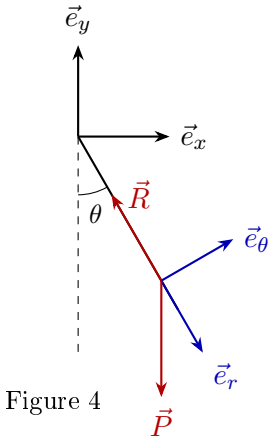


Figure 4

Coup de pouce

Méthode : faire apparaître l'angle entre le vecteur à projeter et chaque vecteur de base. Le cosinus de cet angle donne la composante (au signe près : vérifier sur le dessin si la composante est positive ou négative). Vérifier les cas limites, par exemple $\theta = 0$.

Exercice 7 : Mouvement hélicoïdal

Niveau : ●● ★

Un point matériel se déplace le long d'une hélice circulaire. Son mouvement est donné en coordonnées cylindriques par :

$$r = R \qquad \theta = \omega t \qquad z = ht \qquad \text{où } R,\ h \text{ et } \omega \text{ sont des constantes.}$$

1 Donner l'expression du vecteur vitesse.

2 En déduire que le module de la vitesse est constant.

3 Donner l'expression du vecteur accélération. Commenter.

Coup de pouce

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$; $\vec{e}_z$ est fixe mais $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ tournent.

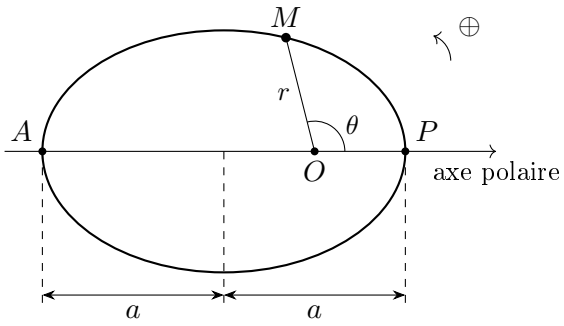
Exercice 8 : Mouvement d'un satellite terrestre

Niveau : ●●● ★★★

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M, est en orbite autour de la Terre. Il décrit, dans le référentiel géocentrique de centre O, une trajectoire plane. Il est repéré par ses coordonnées polaires r et θ. Sa trajectoire est une ellipse d'équation :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

où p et e sont deux constantes positives caractéristiques de la trajectoire : p est appelé le paramètre et e l'excentricité. La trajectoire est décrite dans le sens des θ croissants.



1 Déterminer les expressions littérales de p et e en fonction de r_P et r_A (cf. figure). P est le point de l'ellipse le plus près du point O et A le point le plus éloigné. Faire les applications numériques pour $a = 16 \times 10^3$ km et $OP = 8{,}0 \times 10^3$ km.

2 Établir l'expression générale du vecteur vitesse en coordonnées polaires.

3 En déduire l'expression générale du vecteur accélération en coordonnées polaires.

4 Pour le mouvement étudié, l'accélération est radiale. En déduire que la quantité $r^2\dot{\theta}$ reste constante au cours du mouvement. On la note C.

5 Exprimer les vitesses en P et A et montrer qu'elles sont orthoradiales. En déduire l'expression de C en fonction de r_P et v_P, norme du vecteur vitesse en P. En déduire la valeur numérique de C. On donne $v_P = 8{,}6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

6 Calculer v_A. Le mouvement est-il uniforme ?

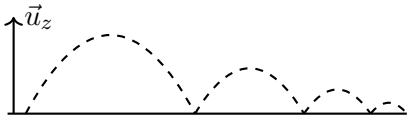
Coup de pouce

1 : en P, $\theta = 0$; en A, $\theta = \pi$. On a aussi $2a = r_A + r_P$. 4 : calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})$ et comparer à la composante orthoradiale de $\vec{a}$. 5 : une vitesse est orthoradiale si $\dot{r} = 0$; calculer $\dot{r}$ en dérivant $r(\theta(t))$.

Exercice 9 : Trajectoire et composante de la vitesse

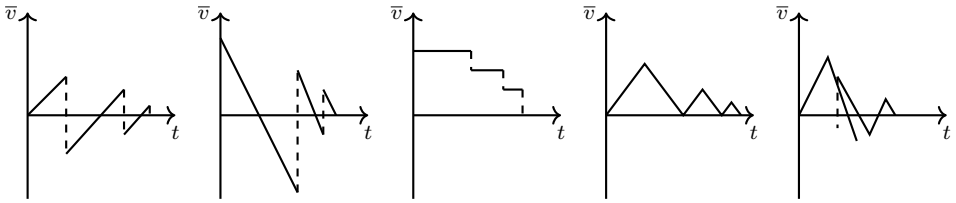
Niveau : ● ★

Un footballeur shoote dans un ballon de telle manière que celui-ci suive la trajectoire ci-contre dans le plan vertical.



1 Ce mouvement est-il rectiligne ?

2 On définit la composante verticale du vecteur vitesse par $v_z = \overline{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}_z$. Quelle courbe correspond le mieux à l'évolution de v_z au cours du temps ? Commenter l'allure générale de cette évolution.



Coup de pouce

Entre deux rebonds, appliquer le PFD au ballon et le projeter sur $\vec{u}_z$. Que devient le signe de v_z lors d'un rebond ?

Exercice 10 : Type résolution de problème : à ne pas reproduire chez vous !

Niveau : ●● ★★



1 Estimer (en g) l'accélération maximale que peut subir une personne sur le tourniquet si la vitesse maximale de la mobylette est de 50 km/h.

2 Vaut-il mieux se rapprocher du centre ou de l'extérieur pour subir l'accélération la plus faible ?

Coup de pouce

La roue arrière de la mobylette entraîne le bord du tourniquet sans glisser : au point de contact, le bord du tourniquet a la vitesse de la mobylette. Le tourniquet est un solide en rotation autour d'un axe fixe : estimer son rayon, en déduire ω, puis l'accélération d'un point situé à la distance r de l'axe.

Exercice 11 : Contrôle aérien et filet de sauvegarde

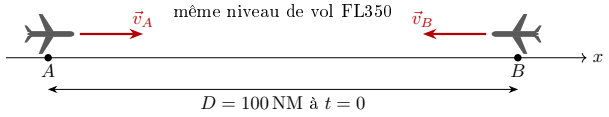
Niveau : ●●● ★★★

Deux avions de ligne volant au même niveau ne doivent jamais se trouver à moins de $d_s = 5\,\text{NM}$ l'un de l'autre (norme de séparation radar ; verticalement, il faut au moins 1000 ft), sinon il y a *perte de séparation*, un incident grave. Pour aider les contrôleurs, un logiciel appelé **filet de sauvegarde** (STCA, *Short Term Conflict Alert*) prolonge en ligne droite, toutes les quelques secondes, la trajectoire de chaque paire d'avions sur une durée $\tau = 2\,\text{min}$; s'il prévoit qu'ils seront à moins de d_s pendant cette durée, leurs étiquettes clignotent en rouge sur l'écran radar : le contrôleur doit alors agir immédiatement.

Données : $1\,\text{NM} = 1852\,\text{m}$; $1\,\text{kt} = 1\,\text{NM\,h}^{-1}$; $1\,\text{ft} = 0{,}3048\,\text{m}$. Avions assimilés à des points, référentiel terrestre galiléen, courbure de la Terre négligée.

Partie A – Deux avions face à face

Deux avions A et B volent au même niveau, sur la même route, l'un vers l'autre, à $v = 450\,\text{kt}$. À $t = 0$, ils sont distants de $D = 100\,\text{NM}$. Origine de l'axe (Ox) en $A(t = 0)$.



A1. Convertir v en $\text{km\,h}^{-1}$ puis en $\text{m\,s}^{-1}$.

A2. Écrire les équations horaires $x_A(t)$ et $x_B(t)$. En déduire la distance $d(t)$ entre les avions.

A3. Au bout de combien de temps t_c les avions se percuteraient-ils si personne n'intervenait ?

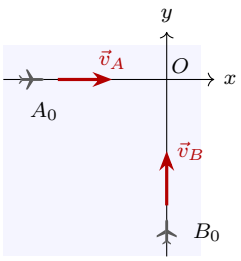
A4. À quel instant t_{PS} y a-t-il perte de séparation ?

A5. À quel instant t_{al} le filet de sauvegarde se déclenche-t-il ? À quelle distance d_{al} sont alors les avions ? De combien de temps le contrôleur dispose-t-il avant la perte de séparation ? avant la collision ?

Partie B – Deux routes qui se croisent

Deux avions au niveau FL350 se dirigent vers le même point de report O (coordonnées en NM, $\vec{e}_x$ vers l'est, $\vec{e}_y$ vers le nord) :

- A vole vers l'est à $v_A = 450\,\text{kt}$; à $t = 0$ il est en $A_0(-40\,;0)$;
- B vole vers le nord à $v_B = 480\,\text{kt}$; à $t = 0$ il est en $B_0(0\,;-45)$.



B1. Cas général. On note $\vec{r}_{A0} = \overrightarrow{OA}(0)$, $\vec{r}_{B0} = \overrightarrow{OB}(0)$ et $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ les vecteurs vitesse (constants). Exprimer $\overrightarrow{OA}(t)$ et $\overrightarrow{OB}(t)$, puis montrer que $\overrightarrow{AB}(t) = \vec{d}_0 + \vec{w}\,t$ avec $\vec{d}_0 = \vec{r}_{B0} - \vec{r}_{A0}$ et $\vec{w} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$. Signification physique de $\vec{w}$?

B2. En déduire que $d(t)^2 = w^2\,t^2 + 2\,(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})\,t + d_0^2$.

B3. Montrer que $d(t)$ est minimale à l'instant $t^* = -\dfrac{\vec{d}_0 \cdot \vec{w}}{w^2}$. Que signifie le cas $\vec{d}_0 \cdot \vec{w} > 0$?

B4. Montrer que la distance minimale vaut $d_{min} = \sqrt{d_0^2 - \dfrac{(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})^2}{w^2}}$.

B5. A.N. Donner les composantes de $\vec{d}_0$ et de $\vec{w}$, puis calculer d_0, t^* et d_{min}. Les deux avions passent-ils au-dessus de O en même temps ? Y a-t-il perte de séparation ?

B6. Déterminer t_{PS}, puis t_{al}. Combien de temps dure la perte de séparation si personne n'intervient ?

Partie C – L'algorithme du filet de sauvegarde

C1. (Python) Vecteurs représentés par des listes `[x, y]` ; distances en NM, vitesses en kt, temps en h. `A0` et `B0` sont les positions **initiales** $A_0 = A(t = 0)$ et $B_0 = B(t = 0)$ (et non les positions à l'instant t) ; `vA` et `vB` sont les vecteurs vitesse, constants.

a. Écrire une fonction `distance(t, A0, B0, vA, vB)` qui renvoie $d(t)$.

b. Écrire une fonction `alerte(t, A0, B0, vA, vB, tau, ds)` qui renvoie `True` si la distance prévue passe sous `ds` entre t et $t + \tau$ (instants testés tous les 4 s, une image radar), `False` sinon.

c. Écrire une fonction `instant_alerte(A0, B0, vA, vB, tau, ds)` qui renvoie l'instant t_{al} où les étiquettes se mettent à clignoter (`alerte` appliquée toutes les 4 s dès $t = 0$; `None` si pas d'alerte en 1 h). Avec les données de la partie B, le programme renvoie $t_{al} \approx 184\,\text{s}$. Commenter le faible écart avec B6.

C2. Pourquoi le filet de sauvegarde ne regarde-t-il pas plus loin que $\tau = 2\,\text{min}$ dans le futur ?

Coup de pouce

A2 : $x_A(t) = vt$ et $x_B(t) = D - vt$. A5 : le filet se déclenche quand la distance *prévue* à l'instant $t + \tau$ devient égale à d_s, c'est-à-dire $d(t + \tau) = d_s$. B2 : $d^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. B3 : d^2 est un polynôme du second degré en t ; il est minimal là où sa dérivée s'annule. B6 : résoudre $d(t)^2 = d_s^2$. C1 : à l'instant t, $\overrightarrow{AB}(t) = \overrightarrow{A_0B_0} + (\vec{v}_B - \vec{v}_A)\, t$ (question B1) ; utiliser `math.sqrt` et des boucles `while`. Attention aux unités : $4\,\text{s} = 4/3600$ h.