TD08 – BASES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE

Version avec aides (questions intermédiaires et coups de pouce)

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

1 Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ?

2 Énoncer les trois lois de Newton.

3 Définir la quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$.

4 Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 en fonction de m_1, m_2 et de $\vec{v}_G$, où G est le centre de gravité du système.

5 On lâche sans vitesse initiale une masse m d'une hauteur h dans le champ de pesanteur terrestre. On néglige les frottements.

a Établir l'expression de $\vec{v}(t)$ et $z(t)$.
b Déterminer l'expression littérale du temps de chute.
c Déterminer l'expression littérale de la vitesse au moment de l'impact au sol.

6 Même situation, mais avec des frottements de la forme $\vec{F} = -k\vec{v}$.

a Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.
b En déduire l'expression de $v(t)$. Commenter.

7 Même situation, avec des frottements de la forme $\vec{F} = -\lambda v\vec{v}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. Commenter.

8 On considère un pendule simple de longueur ℓ au bout duquel est attachée une masse m.

a Établir l'équation du mouvement.
b Résoudre l'équation du mouvement dans l'approximation des petits angles.

9 Énoncer les lois de Coulomb pour les frottements solides.

10 On considère un solide de masse m sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale (coefficient de frottement f).

a Établir l'expression de α_{LIM}, angle à partir duquel le solide commence à glisser.
b Établir l'expression de l'accélération $\vec{a}$ dans le cas où $\alpha > \alpha_{LIM}$. En déduire la nature du mouvement.

Exercice 2 : Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur (important)

Niveau : ●● ★★★

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. On néglige la résistance de l'air. L'origine du repère est la position initiale de M.

1. Montrer que le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant.

2. Établir les équations horaires du mouvement. En déduire que le mouvement est plan.

3. Donner l'expression de la hauteur maximale atteinte en fonction de g, v_0 et α.

4. Donner l'expression de la portée du tir (abscisse du point où M retombe au niveau du sol) en fonction de g, v_0 et α. Pour quel angle la portée est-elle maximale ?

5. On cherche l'ensemble des points (x_0, y_0) qu'il est possible d'atteindre pour une vitesse v_0 donnée.

a. Montrer que x_0 et y_0 vérifient l'équation d'inconnue α : $\dfrac{gx_0^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha - x_0\tan\alpha + \dfrac{gx_0^2}{2v_0^2} + y_0 = 0$.

b. En déduire qu'un point (x_0, y_0) ne peut être atteint que s'il se trouve sous la parabole d'équation $y = -\dfrac{g}{2v_0^2}x^2 + \dfrac{v_0^2}{2g}$, appelée « parabole de sûreté ».

Coup de pouce

3 : au sommet, $\dot{y} = 0$. 4 : résoudre $y(t_f) = 0$ avec $t_f \neq 0$; $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. 5.a : écrire l'équation de la trajectoire $y(x)$ et utiliser $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$. 5.b : poser $X = \tan\alpha$; une équation du second degré a des solutions réelles si $\Delta \geq 0$.

Exercice 3 : Résolution de problème : l'igloo et l'Inuit

Niveau : ●●● ★★★



Un Inuit médite sur le réchauffement climatique du haut de son igloo en forme de demi-sphère. En pleine réflexion, il se met à glisser (sans frottement) ! L'Inuit décolle-t-il de l'igloo ou bien glisse-t-il jusqu'au sol ?

Coup de pouce

Utiliser les coordonnées polaires de centre O (centre de l'igloo), θ étant mesuré depuis l'horizontale. L'Inuit décolle quand la réaction normale s'annule. Projeter le PFD sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$; pour intégrer l'équation selon $\vec{e}_\theta$, la multiplier par $\dot{\theta}$ (astuce : $\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)$).

Exercice 4 : Analyse dimensionnelle et équation adimensionnée

Niveau : ●● ★★★

On lâche une masse m sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur terrestre. Elle est soumise à son poids et à une force de frottement $\vec{F} = -\lambda v\vec{v}$.

1. Quelle est la dimension de λ ?
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par v. *Sans la résoudre*, déterminer la vitesse limite v_L.
3. Construire, par analyse dimensionnelle, un temps caractéristique τ à partir de m, λ et g.
4. On pose $v^* = \dfrac{v}{v_L}$ et $t^* = \dfrac{t}{\tau}$ (grandeurs sans dimension). Montrer que l'équation s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} = 1 - v^{*2}$. Quel est l'intérêt de cette écriture ?
5. La solution est $v^* = \mathrm{th}(t^*)$. Au bout de combien de temps (en fonction de τ) la vitesse atteint-elle 99 % de v_L ? A.N. pour un parachutiste ($m = 80\,\mathrm{kg}$, $\lambda = 0{,}26\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$) et pour une goutte de pluie ($v_L \approx 7\,\mathrm{m/s}$).
6. Reprendre les questions 2 et 3 pour une force $\vec{F} = -k\vec{v}$. Vérifier l'homogénéité.

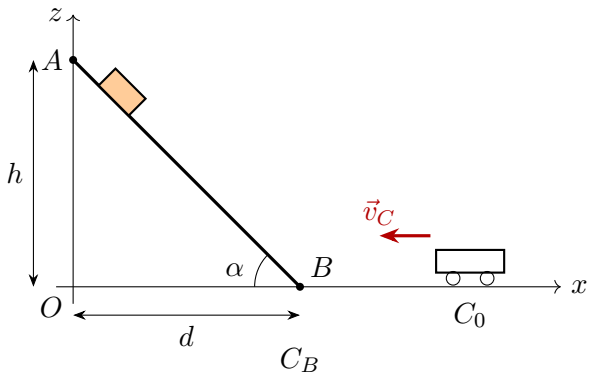
Coup de pouce

2 : en régime permanent, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. 3 : chercher $\tau = m^a\lambda^b g^c$. 4 : remplacer $v = v_L v^*$ et $t = \tau t^*$ dans l'équation, puis diviser par mg.

Exercice 5 : Jeu télévisé

Niveau : ●● ★★★

Un candidat doit laisser glisser un paquet sur un toboggan à partir du point A, de manière à ce qu'il soit réceptionné au point B par un chariot se déplaçant le long de l'axe (Ox). On néglige les frottements de l'air. Le toboggan exerce sur le paquet une réaction normale $\vec{R}_N$ et une réaction tangentielle $\vec{R}_T$ (frottements solides) telle que $\|\vec{R}_T\| = f\|\vec{R}_N\|$ avec $f = 0{,}5$.



Le chariot part du point C_0 à l'instant $t = 0$ vers la gauche avec une vitesse $v_C = 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Arrivé en C_B, il s'arrête pendant $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$. La hauteur du toboggan est $h = 4\,\mathrm{m}$, la distance d est égale à h et $C_0C_B = 2\,\mathrm{m}$. La masse du paquet est $m = 10\,\mathrm{kg}$ et $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

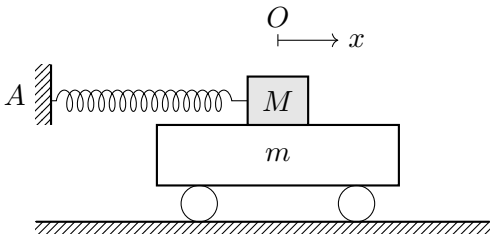
1. On pose $X = AP$ où P est la position du paquet à l'instant t. Déterminer $X(t)$. En déduire le temps mis par le paquet pour arriver en B.
2. À quel instant le joueur doit-il lâcher le paquet sans vitesse initiale pour qu'il tombe dans le chariot ?

Coup de pouce

Prendre un repère lié à la pente ($\vec{e}_x$ le long du toboggan vers le bas, $\vec{e}_y$ perpendiculaire). Le paquet glisse : $R_T = fR_N$. Comme $h = d$, $\alpha = 45°$. 2 : le paquet doit arriver en B pendant que le chariot y est arrêté.

Exercice 6 : Lois de Coulomb – frottements solides

Niveau : ●● ★★★



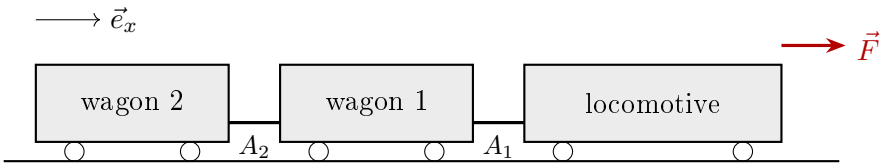
Un chariot de masse m se déplace sans frottements sur le sol. Sur ce chariot se trouve un bloc de masse M ; le coefficient de frottement statique entre le bloc et le chariot est f. La constante de raideur du ressort est k et le point A est immobile dans le référentiel terrestre. Initialement $x = 0$ et le ressort a sa longueur à vide. On déplace très lentement le chariot vers la droite. Pour quelles valeurs de x le bloc glisse-t-il sur le chariot ?

Coup de pouce

Tant que le bloc ne glisse pas, il est en équilibre (le chariot avance très lentement) : $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Le ressort est étiré de x. Utiliser ensuite la loi de Coulomb statique $R_T \leq fR_N$.

Exercice 7 : Le train et ses attelages (3e loi de Newton)

Niveau : ●● ★★★



Une locomotive de masse $M = 80\,\text{t}$ tire deux wagons identiques de masse $m = 40\,\text{t}$ chacun. Les rails exercent sur la locomotive une force motrice horizontale $\vec{F} = F\vec{e}_x$, avec $F = 1{,}6 \times 10^5\,\text{N}$. On néglige tous les frottements.

1. En choisissant le système {train entier}, déterminer l'accélération a du train. Pourquoi les forces exercées par les attelages n'apparaissent-elles pas ?
2. Faire le bilan des forces horizontales sur chacun des trois véhicules, sur un schéma. On note T_1 la force exercée par l'attelage A_1 sur le wagon 1 et T_2 celle exercée par A_2 sur le wagon 2. Utiliser la 3e loi de Newton.
3. Calculer T_1 et T_2. Quel attelage est le plus sollicité ?
4. La locomotive freine désormais seule ($\vec{F}$ devient $-F\vec{e}_x$). Les attelages sont-ils tirés ou comprimés ? Que se passerait-il si les wagons freinaient avant la locomotive ?

Coup de pouce

1 : les forces d'attelage sont *intérieures* au système {train} et se compensent deux à deux (3e loi).
3 : appliquer le PFD au wagon 2 seul, puis au système {wagon 1 + wagon 2}.

Exercice 8 : Patineurs et astronaute : la quantité de mouvement

Niveau : ● ★★★

1. Deux patineurs, Léa ($m_1 = 50\,\text{kg}$) et Tom ($m_2 = 75\,\text{kg}$), sont immobiles face à face sur la glace. Ils se repoussent avec les mains ; Léa part à $v_1 = 1{,}5\,\text{m/s}$. On néglige les frottements de la glace.
   a. Rappeler l'expression de la quantité de mouvement du système {Léa + Tom} en fonction de la vitesse $\vec{v}_G$ de son centre de masse.
   b. Justifier que cette quantité de mouvement se conserve. En déduire la vitesse de Tom. Que fait le centre de masse ?
   c. Les forces exercées par Léa sur Tom et par Tom sur Léa sont-elles égales ? Pourquoi Tom va-t-il moins vite ?
2. Un astronaute de masse $M = 100\,\text{kg}$ (avec sa combinaison) dérive, immobile, à $d = 10\,\text{m}$ de la station spatiale : son câble de sécurité s'est détaché. Il tient une clé de masse $m = 2\,\text{kg}$. Comment peut-il rejoindre la station ? S'il lance la clé à $5\,\text{m/s}$, combien de temps mettra-t-il ?

Coup de pouce

Système isolé horizontalement : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$. Au départ, tout est immobile : $\vec{p} = \vec{0}$ à tout instant.

Exercice 9 : Traction d'un élastique : limite du modèle linéaire

Niveau : ●● ★★★

On suspend des masses m à un élastique vertical et on mesure sa longueur ℓ à l'équilibre :

m (g)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
ℓ (cm)	10,0	12,5	15,0	17,4	19,9	22,6	25,0	27,4	30,8	35,5	42,0

1. Montrer qu'à l'équilibre la force exercée par l'élastique a pour norme $F = mg$.
2. Tracer F en fonction de ℓ. Sur quel domaine le modèle linéaire $F = k(\ell - \ell_0)$ est-il valable ?
3. Déterminer k et ℓ_0 par une régression linéaire sur ce domaine. A.N.
4. Que se passe-t-il au-delà ? Proposer une explication. Retire-t-on toujours la même longueur quand on décharge l'élastique ?
5. **Protocole.** Proposer un protocole permettant d'estimer l'incertitude sur k.

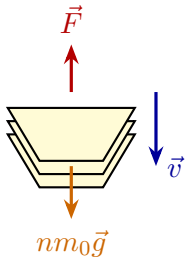
Coup de pouce

2 : repérer à partir de quel point les mesures s'écartent de la droite passant par les premiers points.
3 : en Python, `numpy.polyfit(l, F, 1)` renvoie la pente et l'ordonnée à l'origine.

Exercice 10 : Les filtres à café : quel modèle de frottement ?

Niveau : ●● ★★★

On lâche des filtres à café en papier (masse $m_0 = 1{,}0\,\text{g}$ chacun, rayon d'ouverture $r = 6\,\text{cm}$), empilés par n, et on filme leur chute. Après quelques centimètres, ils tombent à vitesse constante v_L :



n	1	2	3	4	5
v_L (m/s)	1,02	1,40	1,75	1,98	2,26

1. Exprimer v_L en fonction de n pour un frottement linéaire $F = kv$, puis pour un frottement quadratique $F = \lambda v^2$.
2. En traçant $\ln v_L$ en fonction de $\ln n$, déterminer quel modèle convient.
3. En déduire λ. Comparer au modèle $\lambda = \frac{1}{2}\rho_a C_x S$ (avec $\rho_a = 1{,}2\,\text{kg m}^{-3}$, $S = \pi r^2$) : quelle valeur de C_x obtient-on ?
4. Le nombre de Reynolds $Re = \dfrac{\rho_a v D}{\eta}$ (avec $D = 2r$ et $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\text{Pa s}$) permet de choisir le modèle : frottement linéaire si $Re \lesssim 1$, quadratique si $Re \gtrsim 10^3$. Conclure.
5. Pourquoi peut-on mesurer v_L en filmant seulement la fin d'une chute de 2 m ?

Coup de pouce

1 : en régime permanent, le poids $nm_0 g$ compense la traînée. 2 : si $v_L \propto n^\beta$, alors $\ln v_L = \beta \ln n + \text{cste}$. 5 : estimer le temps caractéristique $\tau = v_L/g$.

Exercice 11 : Chute avec frottements : la méthode d'Euler (Python)

Niveau : ●● ★★

Un parachutiste de masse $m = 80\,\text{kg}$ saute d'un avion sans vitesse initiale. Avant l'ouverture du parachute, il subit une force de traînée $F = \lambda v^2$ avec $\lambda = 0{,}26\,\text{kg m}^{-1}$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ (axe vers le bas). Calculer la vitesse limite et le temps caractéristique $\tau = \sqrt{m/(\lambda g)}$.
2. **Méthode d'Euler.** En approchant $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ par $\dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$, montrer que $v(t+\Delta t) = v(t) + \left(g - \dfrac{\lambda}{m} v(t)^2\right)\Delta t$.
3. Écrire un programme Python qui calcule $v(t)$ sur $30\,\text{s}$ avec $\Delta t = 0{,}01\,\text{s}$ et compare la courbe obtenue à la solution exacte $v(t) = v_{lim}\,\text{th}(t/\tau)$.
4. Comment modifier le programme pour simuler l'ouverture du parachute à $t = 20\,\text{s}$ (le coefficient devient $\lambda' = 25\,\text{kg m}^{-1}$) ? Quelle est la nouvelle vitesse limite ?

Exercice 12 : Résolution de problème : le saut de Felix Baumgartner (extrait Centrale MP 2017)

Niveau : ●●● ★★

Document 1 – Le saut supersonique (d'après J.M. Colino *et al.*, Physics Today, 2014). Le 14 octobre 2012, Felix Baumgartner effectue, dans l'atmosphère terrestre, un plongeon hors normes : il est hissé jusqu'à une altitude voisine de 39 km grâce à un ballon d'hélium, puis saute. Un appareil GPS fixé sur sa poitrine a établi plusieurs records : vitesse maximale de 1357,6 km/h, supérieure de 11 % à la vitesse du son dans l'air ($c_{son} \simeq 340\,\text{m s}^{-1}$).



Felix Baumgartner au départ de son saut

Une affaire de traînée. Les corps qui chutent dans l'air subissent une force dirigée dans le sens opposé à la vitesse, appelée force de traînée, proportionnelle au carré de la vitesse : $F_D = KA\rho v^2$, où A est l'aire de l'objet projetée sur un plan orthogonal au mouvement, ρ la masse volumique de l'air et K une constante. Au début du saut, l'air est raréfié et la traînée joue peu ; à mesure que l'altitude diminue, elle devient de plus en plus importante. La vitesse terminale de Baumgartner (traînée = poids) atteint $79{,}4\,\text{m s}^{-1}$ au niveau du sol.

Document 2 – Atmosphère isotherme. En assimilant l'air à un gaz parfait de température uniforme T, la masse volumique de l'air à l'altitude z est $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\dfrac{M_a g z}{RT}\right)$. Données : $M_a = 29\,\text{g mol}^{-1}$, $R = 8{,}31\,\text{J K}^{-1}\,\text{mol}^{-1}$, $T = 300\,\text{K}$.

1. Quelle devrait être l'altitude minimale de départ si le sauteur, voulant atteindre la vitesse du son, n'était soumis qu'à la force de pesanteur ?
2. En exploitant les documents, donner une estimation de l'altitude minimale de saut permettant d'atteindre la vitesse du son. Comparer à l'altitude réelle et discuter les hypothèses.

Coup de pouce

1 : chute libre depuis le repos. 2 : la vitesse est maximale quand la traînée équilibre le poids. Poser $H = \dfrac{RT}{M_a g}$. On peut découper la chute en deux phases : chute libre jusqu'à l'altitude z_{max} où $v = c_{son}$, puis la traînée l'emporte.

Exercice 13 : Résolution de problème : distance de freinage (TSI 2019)

Niveau : ●● ★★★



Figure 6

Afin d'incriminer ou non un éventuel excès de vitesse lors de la sortie de route décrite sur la photographie (figure 6), on vous demande de déterminer l'expression littérale, puis numérique, de la vitesse du véhicule au début de la phase de freinage. Toutes les données pertinentes pourront être introduites par le candidat. Le coefficient de frottement solide entre les pneus et la chaussée vaut $f = 0{,}8$. Les éléments légaux de marquage au sol sont donnés ci-dessous.

Les éléments légaux de marquage au sol sont représentés sur la **figure 7**.

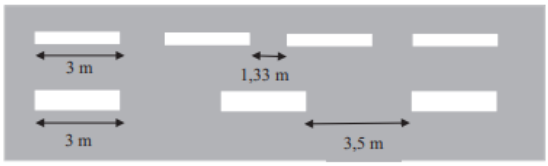


Figure 7 – Législation de marquage au sol

Coup de pouce

Pendant le freinage, les roues sont bloquées : la voiture glisse et $R_T = fR_N$. Estimer la longueur des traces à l'aide des marquages (traits de 3 m séparés de 3,5 m). La voiture est immobile à la fin.